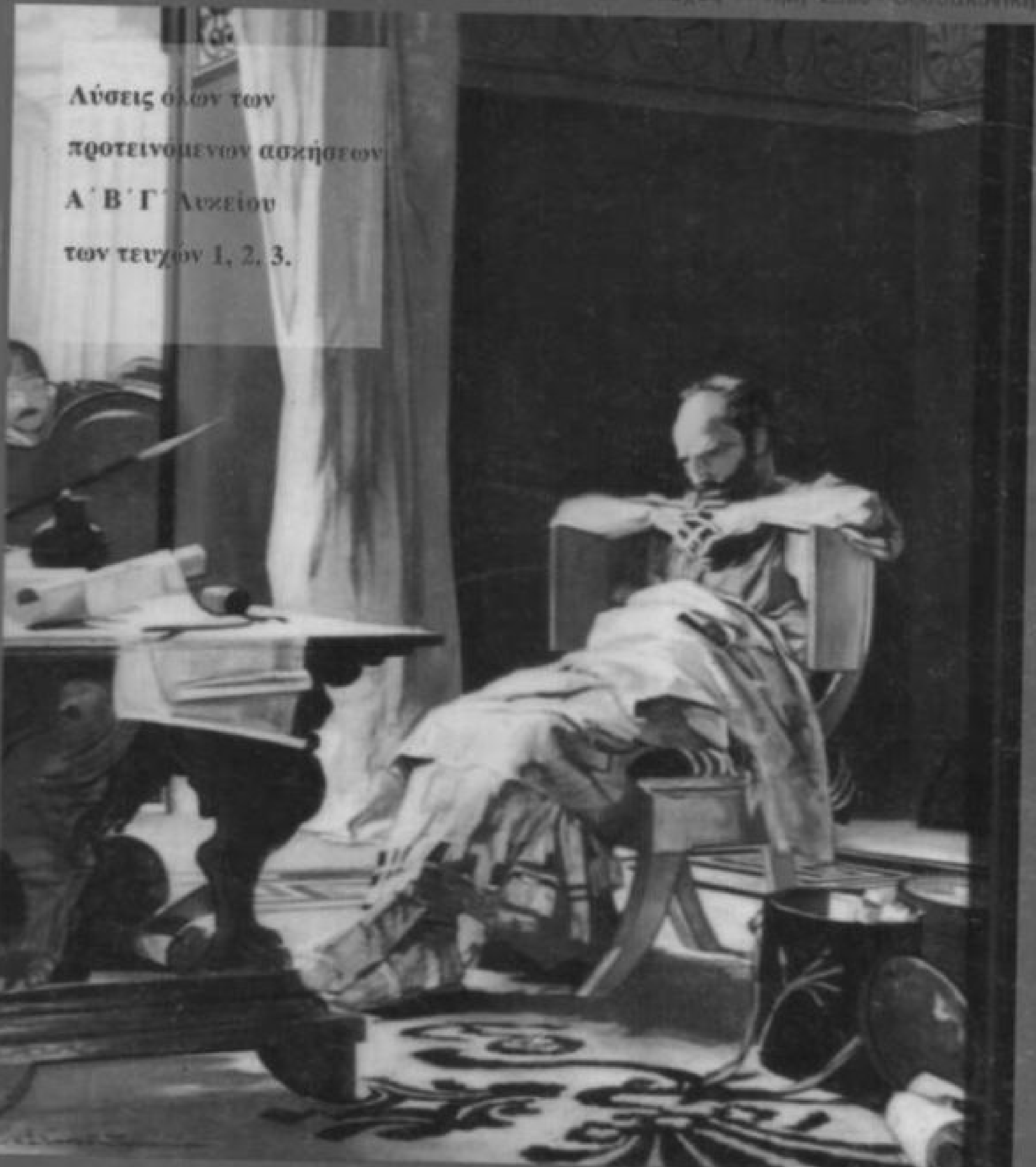
Μαθηματική Παιδεία



Περιοδική έκδοση

Β΄ Εξάμηνο 1997 - Τεύχος 4 - τιμή 2500 - Θεσσαλονίκη



Λύσεις όλων των προτεινομένων ασκήσεων Α΄ Β΄ Γ΄ Λυκείου των τευχών 1, 2, 3.

Εξαμηνιαίο
περιοδικό
**Μαθηματική
Παιδεία**



Τεύχος 4
Μάϊος 1998 (για το Β' εξάμηνο 1997)
τιμή τεύχους 2.500 δρχ.

εκδότης:
Χάρης Βαφειάδης
Συντακτική επιτροπή:
Θ.Ν. Καζαντζής
Ελένη Μήτσιου
Γρηγόρης Ι. Τσιτσίνιας
Γραμματεία:
Λεωνίδας Θαρραλίδης
Τάνια Βαφειάδου

Διεύθυνση: Ι. Δέλλιου 4
54 621 Θεσσαλονίκη
• τηλ.: (031) 263 163 • Fax: 240 595

εικόνα εξωφύλλου:
Αρχιμήδης

Συνδρομές:
- ετήσια συνδρομή 1997 (δύο τεύχη N° 3 και N° 4) 4000 δρχ.
- τα προηγούμενα τεύχη στις αναγραφόμενες τιμές (N° 1 1.500 , N° 2 - 3 2000 δρχ.)
- Το περιοδικό διατίθεται και στα βιβλιοπωλεία

Φωτοστοιχειοθεσία - φιλμ - μοντάζ
SCIENCE - PRESS
Ε. Καμπίτση - Μ. Αβραμίδου
Καμβουνίων 6 τηλ. (031) 262 062

Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο το ένα ύψος είναι 5 και το άλλο 2. Πόσο είναι το τρίτο ύψος;



14
Κυριακή

Περιεχόμενα

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Α΄ λυκείου

A1. Να λυθεί η εξίσωση:

$(\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)x^2 + (\alpha + 2\beta + 3\gamma)x + \frac{3}{4} = 0$

α, β, γ ∈ $\mathbb{R}^*$

Π. Κουρσουμπάς

Λύση: (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού αφού $\alpha^2+4\beta^2+9\gamma^2 \neq 0$ λόγω του α, β, γ ∈ $\mathbb{R}^*$.

Είναι

$$\Delta = (\alpha + 2\beta + 3\gamma)^2 - 4(\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)\frac{3}{4} =$$

$$= \alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2 + 4\alpha\beta + 6\alpha\gamma + 12\beta\gamma - 3\alpha^2 - 12\beta^2 - 27\gamma^2 =$$

$$= -2\alpha^2 - 8\beta^2 - 18\gamma^2 + 4\alpha\beta + 6\alpha\gamma + 12\beta\gamma =$$

$$= (-\alpha^2 + 4\alpha\beta - 4\beta^2) + (-\alpha^2 + 6\alpha\gamma - 9\gamma^2) + (-4\beta^2 + 12\beta\gamma - 9\gamma^2) =$$

$$= -[(\alpha - 2\beta)^2 + (\alpha - 3\gamma)^2 + (2\beta - 3\gamma)^2] \leq 0$$

Αν λοιπόν $\alpha \neq 2\beta$ ή $2\beta \neq 3\gamma$ ή $\alpha \neq 3\gamma$ τότε $\Delta < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $\alpha = 2\beta = 3\gamma \Rightarrow \Delta = 0$ και η εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$x_0 = -\frac{\alpha + 2\beta + 3\gamma}{2(\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)} = -\frac{\alpha + \alpha + \alpha}{2(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2)} = -\frac{3\alpha}{6\alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha}$$

Διδακτική Σύνδεση* Εφαρμογή της ταυτότητας:

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$$

(Άσκηση 5 σελ. 22, Άσκηση 9 σελ. 53 ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ)

A2. Έστω $0 < \alpha < 1$.

i) Να διατάξτε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 1, α, $\frac{1}{\alpha}$.

ii) Να δείξετε ότι πάνω στον άξονα ο α βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο $\frac{1}{\alpha}$.

Χ. Σιωζόπουλος

Λύση: (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

i) Αφού είναι $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$

οπότε η διάταξη είναι

$$0 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha} \quad (1)$$



ii) Πρέπει να αποδείξουμε ότι: $|1 - \alpha| < \left|\frac{1}{\alpha} - 1\right|$ ή λόγω της (1)

$$1 - \alpha < \frac{1}{\alpha} - 1 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} > 2.$$

* *Με τον όρο « Διδακτική Σύνδεση » εννοούμε τη δυνατότητα χρησιμοποίησης της άσκησης για επανάληψη στα θέματα που αναφέρονται. Δεν έχει καμμία σχέση με την αποκαλούμενη Διδακτική των Μαθηματικών και απευθύνεται περισσότερο προς τους συναδέλφους.*

Η τελευταία ισχύει $\forall \alpha > 0 \left(\text{αφού } \alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{\alpha^2 + 1 - 2\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \geq 0\right)$ και $\alpha \neq 1$.

Διδακτική Σύνδεση: Το παράδειγμα της σελίδας 31 και η έννοια της απόστασης δύο αριθμών (σελ. 41) . Δείτε και άσκηση 7 σελ. 36 ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ.

A3. A) Να δειχθεί ότι

i) $(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\gamma^2+\delta^2) \geq (\alpha\gamma+\beta\delta)^2$

ii) $-1 \leq \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} \leq 1$

α, β, γ, δ ∈ $\mathbb{R}$ με $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta| \neq 0$

B) Αν $K = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$

να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - Kx + \frac{1}{2} - \frac{K}{4} = 0$

Π. Κουρσουμπάς

Απόδειξη: (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

A) i) Θεωρούμε τη διαφορά

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 =$$

$$= \alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2 - \beta^2\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta$$

$$= \alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \geq 0$$

(Το = ισχύει όταν $\alpha\delta = \beta\gamma$ και αν $\beta\delta \neq 0$ όταν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$).

Έτσι $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) \geq (\alpha\gamma+\beta\delta)^2$

ii) Αφού $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) \geq (\alpha\gamma+\beta\delta)^2$ και $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \neq = 0$ θα είναι

$$\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)} \leq 1 \text{ ή } \left|\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \leq 1$$

B) Δίνεται ότι $K = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$ οπότε $-1 \leq K \leq 1$.

Η διακρίνουσα της $x^2 - Kx + \frac{1}{2} - \frac{K}{4} = 0$ είναι η

$$K^2 - 4\left(\frac{1}{2} - \frac{K}{4}\right) = K^2 + K - 2 = (K+2)(K - 1) \quad (1)$$

Αφού $K \geq -1 \Rightarrow K + 2 \geq 1 > 0$ ενώ $K - 1 \leq 0$. Αν λοιπόν $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \neq 0$ είναι: $\Delta \leq 0$ και ειδικότερα: Αν $K > -1$ δεν έχει ρίζες στο R ενώ αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow K = +1 \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ οπότε έχει μια ρίζα διπλή.

Διδακτική Σύνδεση: Μια γνωστή ταυτότητα και ανισότητα « στην υπηρεσία » της διακρίνουσας καθώς και η γνωστή πρόταση: $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$.

Δείτε άσκηση 4 σελ. 22 και άσκηση 10 σελ. 53 ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

A4. Θεωρούμε τα σημεία

$A\left(\frac{1}{2x}, 0\right)$, $B(0, x^2)$, $\Gamma(0, -16)$, $x > \frac{3}{4}$.

i) Να εκφράσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του x.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $\frac{x^2 + 16}{4x} \geq 2$.

iii) Με τη βοήθεια αυτής της ανισότητας να βρείτε για ποιά τιμή του x το τρίγωνο ΑΒΓ έχει το μικρότερο δυνατό εμβαδό;

Χ. Σιωζόπουλος

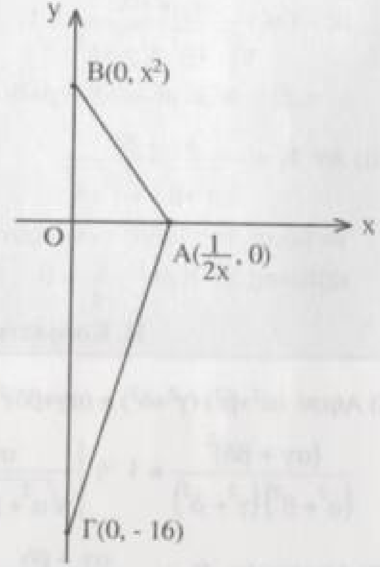
Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Σε ορθοκανονικό σύστημα παίρνουμε τα σημεία

$A\left(\frac{1}{2x}, 0\right)$ (στον άξονα των x), $B(0, x^2)$, $\Gamma(0, -16)$ (στον άξονα των y).

Αφού

$x > \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x > \frac{6}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2x} < \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1$



i) Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ, αν ως βάση πάρουμε τη πλευρά ΒΓ, το επ' αυτήν ύψος είναι το ΑΟ. Έτσι $E = \frac{1}{2}(B\Gamma)(OA)$ (1)

Όμως

$(B\Gamma) = |y_B - y_\Gamma| = |x^2 - (-16)| = |x^2 + 16| =$

$= x^2 + 16$ αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $x^2 + 16 > 0$.

Επίσης $(OA) = \frac{1}{2x}$ $(x > 0)$.

Έτσι το Ε(ΑΒΓ), γραμμένο ως συνάρτηση του x είναι: $E(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 16)\frac{1}{2x} = \frac{x^2 + 16}{4x}$ (2)

ii) Είναι γνωστό ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η :

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \quad (\text{το } \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta)$$

Έτσι $E(x) = \frac{x^2 + 16}{x} = \frac{x^2 + 4^2}{4x} \geq \frac{2 \cdot x \cdot 4}{4x} = 2$ Ώστε $E(x) \geq 2$. Το $E(x) = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

iii) Αφού λοιπόν $\forall x > \frac{3}{4}$ ισχύει $E(x) \geq 2$, η ελάχιστη τιμή του Ε είναι η :

$E(x) = 2$ και συμβαίνει για $x = 4$.

Διδακτική Σύνδεση: Καρτεσιανές συντεταγμένες (§ 2.3) Σχηματισμός τύπου συνάρτησης - ελάχιστη τιμή συνάρτησης (π.χ. Ασκήσεις Β ομάδας σελίδας 143 - 144) ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

A5. Αν α, β, γ θετικοί, δείξτε ότι:

$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) = 8 \Rightarrow \alpha\beta\gamma \leq 1$.

Δ. Γαλανάκης

Απόδειξη : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: για κάθε α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ ισχύει η

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \left(\text{αφού } \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \geq 0\right)$$

έτσι: $1 + \alpha \geq 2\sqrt{\alpha}$ και $1 + \beta \geq 2\sqrt{\beta}$ και $1 + \gamma \geq 2\sqrt{\gamma}$ οπότε

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \geq 8\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma} = 8\sqrt{\alpha\beta\gamma} \qquad (1)$$

Αλλά $(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) = 8$ (2)

Τότε $8 \geq 8\sqrt{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta\gamma} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma \leq 1$.

Το $\alpha\beta\gamma = 1$ ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Διδακτική Σύνδεση: Ανισότητες με υπόθεση.

Η άσκηση 22, $\left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{\alpha}} \geq 2\right)$ **της σελίδας 54 ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

A6. Για α, β, γ διαφορετικούς μεταξύ τους πραγματικούς να δείξετε ότι η εξίσωση:

$(x - \alpha)(x - \beta)(\alpha - \beta) + (x - \beta)(x - \gamma)(\beta - \gamma) + (x - \gamma)(x - \alpha)(\alpha - \gamma) = 0$

έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$.

Ε. Μήτσιου

Απόδειξη : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

1η απόδειξη: Μετά τις πράξεις η εξίσωση γίνεται:

$(\alpha - \gamma)\left[2x^2 - 2(\alpha + \gamma)x + (\alpha\beta + \beta\gamma - \beta^2 + \alpha\gamma)\right] = 0$

$\overset{\alpha \neq \gamma}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 2(\alpha + \gamma)x + (\alpha\beta + \beta\gamma - \beta^2 + \alpha\gamma) = 0$ (1)

Η διακρίνουσα $\Delta = 4(\alpha + \gamma)^2 - 4 \cdot 2(\alpha\beta + \beta\gamma - \beta^2 + \alpha\gamma) =$

$= 4(\alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma + 2\beta^2 - 2\alpha\gamma) =$

$= 4[\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma] =$

$= 4[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2] > 0$ αφού $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

2η απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(\alpha - \beta) + (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \gamma)(x - \alpha)(\alpha - \gamma)$$

η οποία προφανώς είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού (τριώνυμο)

Παρατηρούμε ότι: $f(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$

και $f(\beta) = (\beta - \gamma)(\beta - \alpha)(\alpha - \gamma) = -(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)$

Αφού λοιπόν για $x = \alpha$ και $x = \beta$ το τριώνυμο παίρνει ετερόσημες τιμές, δηλαδή

δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δε μπορεί $\Delta < 0$ ή $\Delta = 0$, οπότε πρέπει $\Delta > 0$ έτσι έχει δύο άνισες ρίζες στο R.

<u>Διδακτική Σύνδεση:</u> Πράξεις και μετατροπή παραστάσεων με στόχο τη διάγνωση του προσήμου τους.

Αλλά και μια άλλη θεώρηση του προβλήματος: Αποδείξτε ότι το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Α7. Δίνεται η ως προς ω δευτερο - βάθμια εξίσωση:

$$\omega^2 - 2(1+x)\omega + y + x^2 + 3 = 0 \quad (1)$$

i) Αν η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα, δείξτε ότι τα σημεία M(x, y) ανήκουν σε μία ευθεία, την οποία να προσδιορίσετε.

ii) Αν η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές τις ω_1, ω_2, οι οποίες πληρούν την σχέση $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$, να δείξτε ότι τα σημεία M(x, y) ανήκουν σε μια παραβολή, την οποία να προσδιορίσετε.

Χ. Σιωζόπουλος

Απόδειξη : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

i) Υποθέτουμε ότι η

$$\omega^2 - 2(1+x)\omega + y + x^2 + 3 = 0 \quad (1)$$

(έχει με άγνωστο το ω) διπλή ρίζα. Τότε

$$\Delta = [-2(1+x)]^2 - 4\cdot 1\,(y + x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\,[(1+x)^2 - (y + x^2 + 3)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2x + x^2 - y - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2 \quad (2)$$

Αφού οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου M(x, y) (όπου τα x, y είναι τα αναφερόμενα στην (1)) πληρούν τη (2), τα σημεία M ανήκουν στην ευθεία (ε) που έχει εξίσωση τη (2).

ii) Υποθέτουμε τώρα ότι η (1) έχει δύο ρίζες ω_1, ω_2 που πληρούν τη σχέση

$$\omega_1 + 2\omega_2 = 0 \quad (3)$$

Τότε θα είναι αφ' ενός $\Delta > 0$ δηλαδή $2x - y - 2 > 0$ (4)

και οι ρίζες ω_1, ω_2, εκτός της (3), θα πληρούν και τις γνωστές σχέσεις

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{2(1+x)}{1}\ \left(S = -\frac{\beta}{\alpha}\right), \qquad \omega_1\,\omega_2 = \frac{y + x^2 + 3}{1}\ \left(P = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

και έτσι θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 + 2\omega_2 &= 0 \\ \omega_1 + \omega_2 &= 2(x+1) \\ \omega_1\,\omega_2 &= y + x^2 + 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -\omega_1 - 2\omega_2 &= 0 \\ \omega_1 + \omega_2 &= 2(x+1) \end{aligned}\right\}+ \ \ \omega_1\,\omega_2 = y + x^2 + 3 \quad \left.\begin{aligned} -\omega_2 &= 2(x+1) \\ \omega_1 + \omega_2 &= 2(x+1) \\ \omega_1\,\omega_2 &= y + x^2 + 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \omega_2 &= -2(x+1) \\ \omega_1 &= 4(x+1) \\ \omega_1\,\omega_2 &= y + x^2 + 3 \end{aligned}\right\}$$

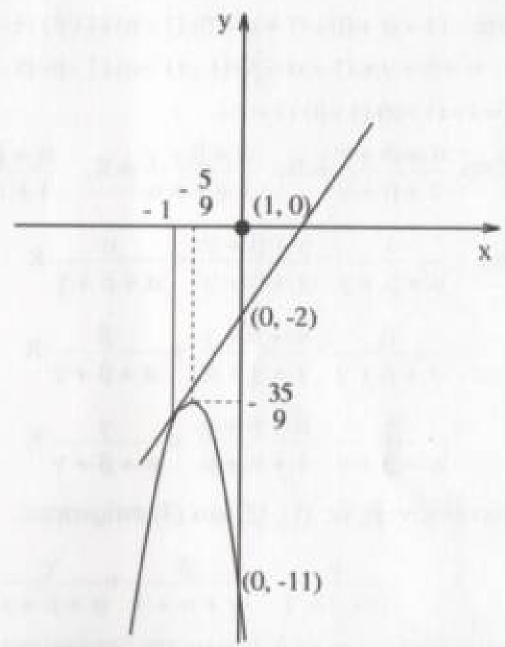
$$\rightarrow -8(x+1)^2 = y + x^2 + 3 \Leftrightarrow -8 - 16x - 8x^2 = y + x^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y = -9x^2 - 16x - 11} \quad (5)$$

Ώστε τα σημεία M(x, y), στη περίπτωση αυτή, βρίσκονται στη παραβολή που έχει εξίσωση (5) και μάλιστα στο τμήμα εκείνο της παραβολής για τα σημεία του οποίου ισχύει η

$$\boxed{2x - y - 2 > 0} \quad (4)$$

(Από τη γραφική παράσταση της (4), τη μελέτη και γραφική παράσταση της (5) προκύπτει ότι ΟΛΑ τα σημεία της παραβολής πληρούν την (4))



<u>Διδακτική Σύνδεση:</u> Εκτός από την υπενθύμιση των εξισώσεων ευθεία - παραβολή το ii) ερώτημα αποτελεί αφορμή για δυο θέματα:

α) Πως εργαζόμαστε όταν έχουμε παραμετρική εξίσωση 2ου βαθμού της οποίας οι ρίζες θέλουμε να πληρούν σχέση της μορφής $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = \mu$ (π.χ. άσκηση 7 σελ. 127 ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ)

β) Τί σημαίνει απαλοιφή και απαλοίφουσα (έννοιες ανύπαρκτες στα σχολικά βιβλία τα τελευταία χρόνια αλλά εφαρμοζόμενες « στα κρυφά ».)

Α8. Αν $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1$, δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma+\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma+1} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+1} + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \le 1.$$

Δ. Γαλανάκης

Το πρόβλημα προτάθηκε στην Μ.Ο. των Η.Π.Α. το 1980. Η λύση που δημοσιεύουμε περιέχεται στο περιοδικό Θεαίτητος , τεύχος 4 - 5 , 1993.

Απόδειξη :

Με $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1$, έχουμε ότι

$$(1+\alpha+\beta)(1-\alpha)(1-\beta) \le (1+\alpha+\beta+\alpha\beta)(1-\alpha)(1-\beta) =$$

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1-\alpha)(1-\beta) = (1-\alpha^2)(1-\beta^2) \le 1, \text{ οπότε}$$

$$(1+\alpha+\beta)(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \le 1 - \gamma.$$

Τότε, $(1+\alpha+\beta) - (1+\alpha+\beta)(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \geq 1+\alpha+\beta-1+\gamma = \alpha+\beta+\gamma$,

ή $\alpha+\beta+\gamma \leq (1+\alpha+\beta)[1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)] = R(1+\alpha+\beta)$, όπου

$R = 1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$.

Έτσι $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\beta+\gamma} \leq R, \quad \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\gamma+\alpha} \leq R, \quad \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta} \leq R$

και $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\beta+\gamma} \leq \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} R \qquad (1)$

$\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\gamma+\alpha} \leq \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} R \qquad (2)$

$\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta} \leq \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} R \qquad (3)$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+1} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha+1} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+1} \leq R$$

Αντικαθιστώντας το R έχουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Α9. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε:

$f(x^{1996}) = x^{1997}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ε. Μήτσιου

Απόδειξη : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

(1) $f(x^{1996}) = x^{1997} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Αφού η (1) ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και για ειδικές τιμές του x.

Βάζουμε στην (1) όπου $x = 1$ και ύστερα όπου $x = -1$ και παίρνουμε:

$f(1^{1996}) = 1^{1997}$ ή $f(1) = 1 \qquad (2)$

$f((-1)^{1996}) = (-1)^{1997}$ ή $f(1) = -1 \qquad (3)$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $1 = -1$, άτοπο.

(Χρήσιμο θα είναι να πούμε ακόμη ότι: Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση, από τις (2) και (3) προκύπτει ότι το $x_o = 1$ έχει δύο εικόνες, τους 1 και -1 πράγμα που δε μπορεί να συμβαίνει σε μια συνάρτηση).

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζεται και η απόδειξη ανυπαρξίας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ η (1)

$f(x^{2\kappa}) = x^{2\kappa+1}$ ή $f(x^{2\kappa}) = x^{2\lambda+1} \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$

Διδακτική Σύνδεση: Κατάλληλη για την έννοια συνάρτησης (όπως και η Α13)

Α10. Να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$ αν ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2}\ \eta\mu\ \frac{\pi x}{2}.$$

Χ. Σιωζόπουλος

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Αφού $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$, θα έχουμε:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2x\frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{2} \qquad (1)$$

Έτσι η $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2}\ \eta\mu\ \frac{\pi x}{2}$ λόγω της (1) δίνει

$$\sqrt{2}\ \eta\mu\ \frac{\pi x}{2} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu\ \frac{\pi x}{2} \geq 1 \qquad (2)$$

Είναι φανερό ότι η (2) θα ισχύει για εκείνα τα x του $\mathbb{R}$ για τα οποία είναι

$\eta\mu\ \frac{\pi x}{2} = 1$ (αφού $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$ $\eta\mu\omega \leq 1$). Η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu\ \frac{\pi x}{2} = \eta\mu\ \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}^{*},\ k \in Z \Leftrightarrow \boxed{x = 4\kappa + 1}\ k \in Z$$

(* Η άλλη οικογένεια: $\frac{\pi x}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ταυτίζεται με την πρώτη)

Α11. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = k$, $k \in \mathbb{R}$ και ακόμη $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta=k$ να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + z + \omega &= 1 \\ \beta x + y + \alpha z + \omega &= 1 \qquad (\Sigma) \\ \gamma x + y + z + \alpha\omega &= 1 \end{aligned}$$

Π. Κουρσουμπάς

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Είναι $K = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$ οπότε η

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha\beta + \gamma\delta = K$ γίνεται

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha\beta + \gamma\delta = \alpha\delta - \beta\gamma \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha\beta + \gamma\delta - \alpha\delta + \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\delta^2 + 2\alpha\beta + 2\gamma\delta - 2\alpha\delta + 2\beta\gamma = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\gamma+\delta)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta = \beta+\gamma = \gamma+\delta = \alpha-\delta = 0.$

Από τις τελευταίες προκύπτει $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$ και $\alpha = \delta$ και $\gamma = \delta$, αλλά και $\gamma = -\delta$ οπότε $\delta = \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

Τότε το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{aligned} z + \omega &= 1 \\ y + \omega &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}\right\} (\Sigma)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων βρίσκουμε

$$2(y + z + \omega) = 3 \Rightarrow y + z + \omega = \frac{3}{2}.$$

Συνδιάζοντας την τελευταία με κάθε μία από τις εξισώσεις του (Σ) βρίσκουμε:

$$y = z = \omega = \frac{1}{2}.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα έχει ως λύσεις τις $\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Διδακτική Σύνδεση:</u> Επανεμφανίζεται η γνωστή ταυτότητα (άσκηση 9i σελ. 53) για τέσσερις μεταβλητές αλλά και υπενθυμίζεται ο τρόπος λύσης του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \alpha \\ y + \omega &= \beta \\ \omega + x &= \gamma \end{aligned}\right\}$$ **σελ. 116 Ασκ. Β 1_{ii}**

Α12. Να δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ που επαληθεύει την εξίσωση:
$|x^3 - x^2 + 3x - 3| + |1 - x^3| + 2|x - 1| = 0$,
η εξίσωση $x^2 - x \cdot 16\eta\mu\alpha + 48 = 0$ είναι αδύνατη.

Ε. Μήτσιου

Απόδειξη : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η εξίσωση

$$|x^3 - x^2 + 3x - 3| + |1 - x^3| + 2|x - 1| = 0$$

επαληθεύεται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$:

$x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$ **και** $1 - x^3 = 0$ **και** $x - 1 = 0$

Η τιμή του x που επαληθεύει και τους τρεις « μηδενισμούς » είναι η x = 1 και μόνο αυτή. Έτσι $\boxed{\alpha = 1}$

Για α = 1 η ως προς x εξίσωση: $x^2 - x16\eta\mu\alpha + 48 = 0$ γίνεται:

$x^2 - 16\eta\mu 1 \cdot x + 48 = 0$ $(\eta\mu 1^{rad})$ και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16^2\,\eta\mu^2 1 - 4 \cdot 48 = 4^4\,\eta\mu^2 1 - 4^3 \cdot 3 = 4^3\left(4\eta\mu^2 1 - 3\right) = 4^3\left(2\eta\mu 1 + \sqrt{3}\right)\left(2\eta\mu 1 - \sqrt{3}\right)$$

Είναι $\frac{\pi}{4} < 1^{rad} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \eta\mu 1^{rad} < \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\eta\mu 1 - \sqrt{3} < 0$

Έτσι Δ < 0 οπότε η τελευταία εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

<u>Διδακτική Σύνδεση:</u>

Η συνάρτηση ημx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Α13. Να δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει:
$f(1 - \eta\mu x) + f(1 - \sigma\upsilon\nu x) = x^2 + 1$,
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ε. Μήτσιου

Απόδειξη : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Όπως και στην Α9, υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $\forall\, x \in \mathbb{R}$ η

(1) $f(1 - \eta\mu x) + f(1 - \sigma\upsilon\nu x) = x^2 + 1$

και θα οδηγηθούμε σε άτοπο.

Στην (1) βάζουμε όπου x το 0 και παίρνουμε:

$$f(1 - \eta\mu 0) + f(1 - \sigma\upsilon\nu 0) = 0^2 + 1 \Leftrightarrow f(1) + f(0) = 1 \qquad (2)$$

Επίσης βάζουμε όπου x το $\frac{\pi}{2}$ και παίρνουμε:

$$f\left(1 - \eta\mu\frac{\pi}{2}\right) + f\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1 \;\;\text{ή}\;\; f(0) + f(1) = \frac{\pi^2}{4} + 1 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $\frac{\pi^2}{4} + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} = 0$, άτοπο.

Α14. Αν $\eta\mu^{11}x + \sigma\upsilon\nu^{11}x = 1$ δείξτε ότι $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$

Χ. Σιωζόπουλος

Απόδειξη : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η (1) $\eta\mu^{11}x + \sigma\upsilon\nu^{11}x = 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^{11}x + \sigma\upsilon\nu^{11}x = \eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x \Leftrightarrow$

$\eta\mu^{11}x - \eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^{11}x - \sigma\upsilon\nu^2x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2x\,(\eta\mu^9x - 1) + \sigma\upsilon\nu^2x\,(\sigma\upsilon\nu^9x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x\,(1 - \eta\mu^9x) + \sigma\upsilon\nu^2x(1 - \sigma\upsilon\nu^9x) = 0 \qquad (2)$

Επειδή $\eta\mu^2x \geq 0$ και $1 - \eta\mu^9x \geq 0$ και $\sigma\upsilon\nu^2x \geq 0$ και $1 - \sigma\upsilon\nu^9x \geq 0$ από την (2) (όπου έχουμε άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών ίσο με μηδέν) παίρνουμε

$\eta\mu^2x(1 - \eta\mu^9x) = 0$ και $\sigma\upsilon\nu^2x(1 - \sigma\upsilon\nu^9x) = 0 \Leftrightarrow$

$(\eta\mu x = 0$ ή $\eta\mu x = 1)$ και $(\sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x = 1)$

Λόγω της $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1$ αποκλείεται να είναι $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 1$.

Άρα θα έχουμε $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$ ή $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$ και στις δύο περιπτώσεις είναι $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$.

ΣΧΟΛΙΟ

Όμοια δείχνουμε ότι: Αν $\eta\mu^{2\kappa+1}x + \sigma\upsilon\nu^{2\kappa+1}x = 1 \Rightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$ $(\kappa \in \mathbb{N}^*)$

Α15. Η μέση ηλικία των 20 ατόμων ενός χορευτικού συγκροτήματος ενός πολιτιστικού συλλόγου είναι 22 έτη και 4 μήνες και η τυπική απόκλιση 3 μήνες. Αν στο χορευτικό προσληφθεί ένα ακόμη άτομο ηλικίας 17 ετών και ενός μηνός ποια θα είναι τότε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση.

Χ. Σιωζόπουλος

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η μέση τιμή ηλικίας των 20 αρχικών μελών του χορευτικού είναι:

$$\overline{x}_{\alpha\rho} = 22 \cdot 12 + 4 = 268 \text{ μήνες},$$

και επειδή

$$\overline{x}_{\alpha\rho} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20}$$ έχουμε:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{20}}{20}=286 \Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_{20}=5\cdot 360$$

Η μέση ηλικία των 21 μελών της τελικής σύνθεσης του χορευτικού δίνεται από τον τύπο: $\bar{x}_{\text{τελ}}=\dfrac{(x_1+x_2+\cdots+x_{20})+x_{21}}{21}$ και επειδή $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=5\cdot 360$ και $x_{21}=17\cdot 12+1=205$ έχουμε:

$$\bar{x}_{\text{τελ}}=\frac{5\cdot 360+205}{21}=265 \text{ μήνες } (=22 \text{ έτη και } 1 \text{ μήνας}).$$

Η τυπική απόκλιση των 20 αρχικών μελών του χορευτικού δίνεται από τον τύπο:

$$s_{\text{αρ}}^2=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_{20}^{\,2}}{20}-(\bar{x}_{\text{αρ}})^2$$

και επειδή $s_{\text{αρ}}=3$ μήνες και $\bar{x}=268$ μήνες έχουμε:

$$3^2=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_{20}^{\,2}}{20}-268^2 \Leftrightarrow x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_{20}^{\,2}=1436660$$

Η τυπική απόκλιση της ηλικίας των 21 μελών της τελικής σύνθεσης του χορευτικού δίνεται από τον τύπο:

$$s_{\text{τελ}}^2=\frac{(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_{20}^{\,2})+x_{21}^{\,2}}{21}-(\bar{x}_{\text{τελ}})^2$$

και επειδή $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_{20}^{\,2}=1436660$ και $\bar{x}_{\text{τελ}}=265$ έχουμε:

$s_{\text{τελ}}^2=70413{,}58-70225=188{,}58$ οπότε $s_{\text{τελ}}=\sqrt{188{,}58}=13{,}73$ μήνες.

Α16. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=4\varepsilon-1\\
&\varepsilon^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=4\alpha-1\\
&\varepsilon^2+\alpha^2+\gamma^2+\delta^2=4\beta-1\\
&\varepsilon^2+\alpha^2+\beta^2+\delta^2=4\gamma-1\\
&\varepsilon^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4\delta-1
\end{aligned}$$

Γ. Φώλας

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Αν υπάρχει δ. πεντάδα (α, β, γ, δ, ε) τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=4\varepsilon-1\\
&\varepsilon^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=4\alpha-1\\
&\varepsilon^2+\alpha^2+\gamma^2+\delta^2=4\beta-1\\
&\varepsilon^2+\alpha^2+\beta^2+\delta^2=4\gamma-1\\
&\varepsilon^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4\delta-1
\end{aligned}\right\}$$

τότε η διατ. πεντάδα αυτή θα επαληθεύει και την εξίσωση που θα προκύψει από την πρόθεση κατά μέλη των παραπάνω εξισώσεων δηλ.. την

$4\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2+4\delta^2+4\varepsilon^2=4\varepsilon+4\alpha+4\beta+4\gamma+4\delta-5$ η οποία γράφεται ισοδυνάμως:

$(4\alpha^2-4\alpha+1)+(4\beta^2-4\beta+1)+(4\gamma^2-4\gamma+1)+(4\delta^2-4\delta+1)+(4\varepsilon^2-4\varepsilon+1)=0 \Leftrightarrow$

$(2\alpha-1)^2+(2\beta-1)^2+(2\gamma-1)^2+(2\delta-1)^2+(2\varepsilon-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$2\alpha-1=0$ και $2\beta-1=0$ και $2\gamma-1=0$ και $2\delta-1=0$ και $2\varepsilon-1=0 \Leftrightarrow$

$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\dfrac{1}{2}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι τιμές αυτές επαληθεύουν το σύστημα.

Έτσι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια διατεταγμένη ν- άδα (π.χ. πεντάδα) επαληθεύει τις εξισώσεις ενός συστήματος με ν αγνώστους θα επαληθεύει και τις εξισώσεις του συστήματος. Όχι όμως και αντίστροφα.

Α17. Εάν $2<\beta<3$, $\beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$\alpha x^2-(\alpha-1)x+\beta-3=0$$

έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές και ότι $(\alpha-\beta)^2>\beta^2-10\alpha-1+2\alpha\beta$

Ε. Μήτσιου

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Με την προϋπόθεση ότι $\alpha\neq 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\alpha x^2-(\alpha-1)x+\beta-3$$

η οποία είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού (τριώνυμο). Παρατηρούμε ότι:

$$f(0)=\beta-3<0$$

ενώ $f(1)=\alpha-(\alpha-1)+\beta-3=\beta-2>0$ αφού $2<\beta<3$

Έτσι το τριώνυμο **δε** διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, άρα δεν μπορεί $\Delta\leq 0$. Έτσι $\Delta>0$ δηλαδή έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Φυσικά τα ίδια (ως προς τις ρίζες) αφορούν και την αντίστοιχη εξίσωση $\alpha x^2-(\alpha-1)x+\beta-3=0$.

Τώρα αφού η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, θα είναι

$\Delta>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2-4\alpha(\beta-3)>0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1-4\alpha\beta+12\alpha>0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\beta^2-2\alpha\beta+10\alpha+1>0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2>\beta^2-10\alpha-1+2\alpha\beta$

<u>Διδακτική Σύνδεση:</u> Αντί της « απ' ευθείας» απόδειξης ότι $\Delta>0$, βασιζόμαστε στο πρόσημο του τριωνύμου. (Δείτε και Α6)

Α17. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ, να λυθεί η εξίσωση

$$\lambda^2(x+1)+2[\lambda(2x-\lambda)+1-x]=1+(\lambda^2+4\lambda-2)x,$$ ως προς x.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Συγκελάκης Αλέξανδρος, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Καρτσούνα Αγνή, Δημητριάδης Στέφανος (μαθητές).

Λύση :

Μετά τις πράξεις, η εξίσωση γράφεται: $0\cdot x=\lambda^2-1$. Έτσι:

- Αν $\lambda\neq\pm 1$, είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$, είναι ταυτότητα.

A18. Όμοια η

$\lambda^2(2x-1) + 7(x+\lambda) = 6(\lambda - 1) + 2x(\lambda^2+1)$

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Δημητριάδης Στέφανος, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Καρτσούνα Αγνή, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

Μετά τις πράξεις: $5\cdot x = \lambda^2 - \lambda - 6$ άρα $x = \dfrac{\lambda^2-\lambda-6}{5}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

A19. Όμοια η

$\alpha^2(x+1) + 2\beta(\beta x - \alpha) = \beta^2(x+1)$

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Δημητριάδης Στέφανος, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Καρτσούνα Αγνή, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

Η εξίσωση γίνεται: $(\alpha^2+\beta^2)\cdot x = \beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2$ οπότε:

- Αν $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$, είναι ταυτότητα.
- Αν $\alpha^2+\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, έχει λύση: $x = \dfrac{\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$

A20. Δίνεται φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε $\nu^2 - 1 < 8$. Για τις διάφορες τιμές του ν, να λυθεί η εξίσωση:

$\nu^2(\lambda-1) + \lambda(6-5\nu) + 4 = 0$, ως προς λ.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται:

$(\nu^2-5\nu+6)\cdot\lambda = \nu^2-4 \quad$ **(1)**

Ακόμη $\nu^2<9 \Leftrightarrow \nu=0$ ή $\nu=1$ ή $\nu=2$ αφού $\nu\in\mathbb{N}$.

- Για $\nu=0$: $(1)\Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$
- Για $\nu=1$: $(1)\Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{3}{2}$
- Για $\nu=2$: $(1)\Leftrightarrow 0\cdot\lambda=0$, ταυτότητα.

A21. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση

$\lambda^2(x-1) + 2(\lambda - x) = \lambda x - 8$

έχει σύνολο λύσεων το $\mathbb{R}$.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Δημητριάδης Στέφανος, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Καρτσούνα Αγνή, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

Η εξίσωση γίνεται: $(\lambda-2)(\lambda+1)\cdot x = (\lambda-4)(\lambda+2)$ και έχει σύνολο λύσεων το $\mathbb{R}$

όταν $\begin{cases}(\lambda-2)\cdot(\lambda+1)=0\\ \text{και}\\ (\lambda-4)(\lambda+2)=0\end{cases}$, αδύνατο. Ώστε: δεν υπάρχει τιμή του λ που θέλουμε.

A22. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές των α, β, να λυθεί η εξίσωση

$\alpha(\alpha x-1) + 3(1+x) + \beta(x-\beta) =$

$(\alpha^2+3+\beta)x - \beta^2$.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Δημητριάδης Στέφανος, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Καρτσούνα Αγνή, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται: $0\cdot x = \alpha - 3$. Έτσι:

- Αν $\alpha=3$, $\beta\in\mathbb{R}$ είναι αόριστη.
- Αν $\alpha\neq 3$, $\beta\in\mathbb{R}$ είναι αδύνατη.

A23. Να λυθεί η εξίσωση

$x\cdot\sqrt{(1-\lambda)(1+\lambda)} - 6\lambda + 1 =$

$7\lambda^2 - x\cdot\sqrt{2\lambda^2-2}$, ως προς x.

Ε. Μήτσιου

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λεωνίδας

Λύση :

Πρέπει $\begin{cases}(1-\lambda)(1+\lambda)\geq 0\\ \text{και}\\ 2\lambda^2-2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-\lambda^2\geq 0\\ \\ \lambda^2-1\geq 0\end{cases}$

άρα $\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-1$.

- Για $\lambda=1$, η εξίσωση γίνεται: $-5=7$ και είναι αδύνατη.
- Για $\lambda=-1$, γίνεται: $7=7$ και είναι ταυτότητα.

A24. Όμοια η εξίσωση

$(\alpha+1)^2x + 4x = 2(\alpha+3)x$

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Δημητριάδης Στέφανος, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Καρτσούνα Αγνή, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

Μετά τις πράξεις έχουμε: $(\alpha^2-1)\cdot x = 0$, οπότε:

- Αν $\alpha=1$ ή $\alpha=-1$, είναι ταυτότητα.
- Αν $\alpha\neq\pm 1$, είναι αδύνατη.

A25. Για τις διάφορες τιμές των α, β, γ να λυθεί, ως προς x η εξίσωση

$\alpha(\alpha x-2) + (\beta+\gamma)^2x + 9 =$

$3\beta(\gamma x-1) + \alpha(\beta+\gamma)x + 4\gamma$.

Ε. Μήτσιου

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λεωνίδας

Λύση :

Μετά τις πράξεις έχουμε:

$[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2]\cdot x = 2\cdot(2\alpha-3\beta+4\gamma-9)$. Έτσι:

- Αν $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$, η εξίσωση γίνεται: $0\cdot x = 6\cdot(\alpha-3)$ και είναι: — αδύνατη για $\alpha=\beta=\gamma\neq 3$ — ταυτότητα για $\alpha=\beta=\gamma=3$.

• Αν $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow \alpha\neq\beta$ ή $\beta\neq\gamma$ ή $\gamma\neq\alpha$, τότε η εξίσωση έχει λύση: $x=\dfrac{2\cdot(2\alpha-3\beta+4\gamma-9)}{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2}$.

Α26. Αν η εξίσωση

$$\alpha^2[(\gamma-\beta)x-1]+\beta^2[(\alpha-\gamma)x-1]+$$
$$+\gamma^2[(\beta-\alpha)x-1]=3$$

είναι αδύνατη ως προς x και α, β, γ πλευρές τριγώνου να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Ε. Μήτσιου

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λεωνίδας, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Αλέξανδρος, Τσιτσίνιας Ιωαν. Γρηγόρης.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται:
$(\alpha^2\gamma-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^2\gamma+\gamma^2\beta-\gamma^2\alpha)\cdot x=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3$ και αφού $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3>0$,

θα είναι αδύνατη όταν:
$\alpha^2\gamma-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^2\gamma+\gamma^2\beta-\gamma^2\alpha=\alpha \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ή $\beta=\gamma$ ή $\gamma=\alpha$

$\Leftrightarrow$ Το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

Α27. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α, β, γ έτσι ώστε

$$\alpha(\alpha-2)x-3\beta(2x+1)+35x+3=$$
$$2(2\alpha-\gamma)-(\beta^2+\gamma^2)x+10\gamma x$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Ε. Μήτσιου

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λεωνίδας, Ιωσηφίδης Λεωνίδας.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται:
$[(\alpha-1)^2+(\beta-3)^2+(\gamma-5)^2]x=4\alpha+3\beta-2\gamma-3$

και είναι ταυτότητα όταν : $\begin{cases}(\alpha-1)^2+(\beta-3)^2+(\gamma-5)^2=0\\ \text{και}\\ 4\alpha+3\beta-2\gamma-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=1,\ \beta=3,\ \gamma=5,$

που δεν είναι δυνατό να αποτελούν πλευρές τριγώνου αφού $\gamma>\alpha+\beta$.

Α28. Να αποδειχθούν

α) $\left(\dfrac{2-\sqrt3}{2}\right)^{-1}-\left(\dfrac{2+\sqrt3}{2}\right)=3\left(\dfrac{1+\sqrt3}{2}\right)^2$

β) $\sqrt{\dfrac{9}{(2-\sqrt7)^2}}-\sqrt{\dfrac{4}{(\sqrt5-\sqrt7)^2}}=2-\sqrt5$

Χ. Λώλης

Λύση έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

α) Είναι:

$$\left(\frac{2-\sqrt3}{2}\right)^{-1}-\frac{2+\sqrt3}{2}=\frac{2}{2-\sqrt3}-\frac{2+\sqrt3}{2}=$$

$$=\frac{2(2+\sqrt3)}{2^2-\sqrt3^2}-\frac{2+\sqrt3}{2}=2(2+\sqrt3)-\frac12(2+\sqrt3)$$

$$=\frac32(2+\sqrt3)=3\cdot\frac{2+\sqrt3}{2}=3\cdot\frac{4+2\sqrt3}{4}=3\cdot\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)^2.$$

β) Είναι: $\sqrt{\dfrac{9}{(2-\sqrt7)^2}}-\sqrt{\dfrac{4}{(\sqrt5-\sqrt7)^2}}=\dfrac{3}{|2-\sqrt7|}-\dfrac{2}{|\sqrt5-\sqrt7|}=\dfrac{3}{\sqrt7-2}-\dfrac{2}{\sqrt7-\sqrt5}=$

$$=\frac{3(\sqrt7+2)}{\sqrt7^2-2^2}-\frac{2(\sqrt7+5)}{\sqrt7^2-\sqrt5^2}=(\sqrt7+2)-(\sqrt7+\sqrt5)=2-\sqrt5.$$

Α29. Να αποδειχθεί ότι για κάθε α>0 ισχύει:

$$\frac{\alpha^{1996}+1}{\alpha^{1997}+1}\geq\frac{\alpha^{1997}+1}{\alpha^{1998}+1}$$

Χ. Λώλης

Λύση έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Αλέξανδρος, Σκοτίδας Σωτήρης, Τσιτσίνιας Γρηγόρης.

Λύση :

$$\frac{\alpha^{1996}+1}{\alpha^{1997}+1}\geq\frac{\alpha^{1997}+1}{\alpha^{1998}+1}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cancel{\alpha^{3994}}+\alpha^{1996}+\alpha^{1998}\cancel{+1}\geq\cancel{\alpha^{3994}}+2\cdot\alpha^{1997}\cancel{+1}\Leftrightarrow \alpha^{1996}\cdot(1+\alpha^2)\geq2\cdot\alpha^{1997}$

$\Leftrightarrow 1+\alpha^2\geq2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)^2\geq0$, που ισχύει.

Α30. Δίνονται τα τριώνυμα

$$f(x)=x^2+\mu x+k$$
$$g(x)=-x^2+\mu x+k$$

με μ, k∈ℝ και f(α) = g(β) = 0 όπου α, β∈ℝ. Να δείξετε ότι υπάρχει

$$\gamma\in\mathbb{R}: 3f(\gamma)+g(\gamma)=0$$

Ε. Μήτσιου

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λεωνίδας, Ιωσηφίδης Λεωνίδας.

Λύση :

Είναι $3f(x)+g(x)=2x^2+4\mu x+4k$
και αρκεί να δείξουμε ότι
$\Delta=16\mu^2-32k=16(\mu^2-2k)\geq0.$

Τα τριώνυμα $x^2+\mu x+k$, $-x^2+\mu x+k$ έχουν ρίζα οπότε οι διακρίνουσές τους είναι μη αρνητικές:

$\begin{cases}\mu^2-4k\geq0\\ \mu^2+4k\geq0\end{cases}$. Έτσι $\mu^2\geq4|k|\geq2|k|\geq2k$ οπότε $\mu^2-2k\geq0$, δηλ. $\Delta\geq0$.

Α31. Αν $\alpha \geq 0$, να δείξετε ότι

$$\alpha^4+\alpha^3-10\alpha^2+9\alpha+1>0$$

Χ. Σιωζόπουλος

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ελένη

Λύση :

$\alpha^4+\alpha^3-10\alpha^2+9\alpha+1=\alpha^4-4\alpha^3+6\alpha^2-4\alpha+1+5\alpha^3-16\alpha^2+13\alpha=$

$(\alpha-1)^4+\alpha[5\alpha^2-16\alpha+13]=(\alpha-1)^4+\alpha[4\alpha^2-12\alpha+9+\alpha^2-4\alpha+4]=$

$(\alpha-1)^4+\alpha[(2\alpha-3)^2+(\alpha-2)^2]>0$, για κάθε $\alpha\geq 0$.

Α32. Να αποδειχτεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει:

$$(1+ημα)(1+συνα)<3.$$

Π. Βασιλειάδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λεωνίδας.

Λύση :

Ισχύει: $(ημα-συνα)^2\geq 0 \Leftrightarrow \ldots\ ημα\cdot συνα\leq \frac{1}{2}$ (1) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Ακόμη ισχύει: $ημα+συνα\leq\sqrt{2}$ (2). Πράγματι:

- Αν $ημα+συνα\leq 0$, η (2) είναι προφανής ενώ
- Αν $ημα+συνα>0$, η (2) $\Leftrightarrow (ημα+συνα)^2\leq\sqrt{2}^2 \Leftrightarrow \ldots\ 2ημασυνα\leq 1$

που ισχύει από την (1). Έτσι, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$:

$$(1+ημα)(1+συνα)=1+ημα+συνα+ημα\,συνα\leq 1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}<3.$$

Α33. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη (x,y), όπου x και y είναι ακέραιοι, που επαληθεύουν τη σχέση: $x^3=y^3+y$

Α. Λεβάκος

Λύση έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Αλέξανδρος.

Λύση :

$x^3=y^3+y \Leftrightarrow x^3-y^3=y$ (1)

Αν $y=0$ τότε (1) $\Leftrightarrow x=0$ άρα $(x,y)=(0,0)$ είναι λύση.

Αν $y\neq 0$ τότε για $y>0$, (1) $\Rightarrow x^3>y^3\Rightarrow x>y>0$ οπότε x, y ομόσημοι ενώ για $y<0$, (1) $\Rightarrow x^3<y^3\Rightarrow x<y<0$ άρα x, y ομόσημοι.

Έτσι $x\cdot y>0$ οπότε $x^2+xy+y^2>y^2\geq|y|$, αφού $y\in Z^*$.

Συμπεραίνουμε ότι $|x-y|\cdot|x^2+xy+y^2|>|x-y|\cdot|y| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |y|>|x-y|\cdot|y| \Leftrightarrow |x-y|<1$

και αφού $x,y\in Z$ $|x-y|=0\Leftrightarrow x=y$. Αλλά τότε (1) $\Leftrightarrow y=0$, ατόπο. Ώστε η μοναδική λύση είναι $(x,y)=(0,0)$.

Α34. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+4\alpha x+3\alpha^2+2\alpha=0,\ \alpha\in Z.$$

Για ποιές τιμές του α η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις.

Κατσιούλης Δ. - Νίκου Θ

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Συγκελάκης Α.

Λύση :

Είναι $\Delta=(4\alpha)^2-4\cdot(3\alpha^2+2\alpha)=4\cdot(\alpha^2-2\alpha)$ οπότε πρέπει $\alpha^2-4\alpha\geq 0$.

Τότε $x_{1,2}=\dfrac{-4\alpha\pm 2\sqrt{\alpha^2-2\alpha}}{2}=-2\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha}$

Οι ρίζες είναι ακέραιες μόνον όταν το $\alpha^2-2\alpha$ είναι τέλειο τετράγωνο, δηλ. $\alpha^2-2\alpha=\kappa^2$. Όμως $\alpha^2-2\alpha=(\alpha-1)^2-1$ οπότε πρέπει

$$(\alpha-1)^2-1=\kappa^2,\ \kappa\in Z\Leftrightarrow(\alpha-1)^2-\kappa^2=1.$$

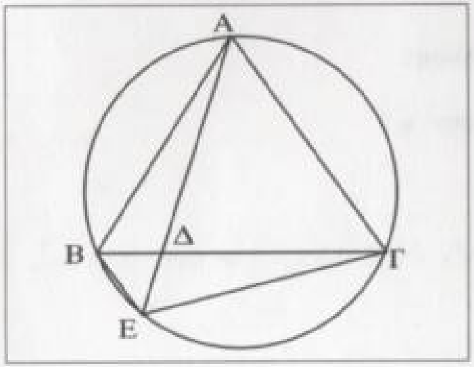
Επειδή δεν υπάρχουν τέλεια τετράγωνα με διαφορά 1, θα είναι $(\alpha-1)^2=1$, $\kappa=0$.

Βρίσκουμε $\alpha=0$ ή $\alpha=2$.

Α35. Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, R). Από το Α φέρνουμε χορδή ΑΕ η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ.

Δείξτε ότι $\dfrac{1}{ΕΔ}=\dfrac{1}{ΕΒ}+\dfrac{1}{ΕΓ}$.

Σωτ. Σκοτίδας



Λύσεις έστειλαν οι: Σκοτίδας Σ., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση 1η :

Η αποδεικτέα γράφεται: $\dfrac{ΕΔ}{ΕΒ}+\dfrac{ΕΔ}{ΕΓ}=1$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: $\overset{\triangle}{ΕΒΔ}\sim\overset{\triangle}{ΓΑΔ}$

οπότε: $\dfrac{ΕΔ}{ΕΒ}=\dfrac{ΔΓ}{ΑΓ}$ (1)

και $\overset{\triangle}{ΕΓΔ}\sim\overset{\triangle}{ΑΔΒ}\Rightarrow\dfrac{ΕΔ}{ΕΓ}=\dfrac{ΒΔ}{ΑΒ}$ (2)

Από (1), (2): $\dfrac{ΕΔ}{ΕΒ}+\dfrac{ΕΔ}{ΕΓ}=$

$$=\frac{ΔΓ}{ΑΓ}+\frac{ΒΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}+\frac{ΒΔ}{ΒΓ}=\frac{ΒΓ}{ΒΓ}=1$$

αφού $ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ$

Λύση 2η :

Από θεώρημα Πτολεμαίου στο ΑΒΕΓ, παίρνουμε:

$$ΑΕ\cdot ΒΓ=ΑΒ\cdot ΕΓ+ΑΓ\cdot ΕΒ\ \Rightarrow\ ΑΕ=ΕΓ+ΕΒ$$

Φέρνω $ΕΖ\perp ΒΓ$.



Τότε $(\text{ΒΕΓ}) = \frac{1}{2}\,\text{ΒΓ}\cdot\text{ΕΖ} = \frac{1}{2}\,\text{ΒΕ}\cdot\text{ΕΓ}\cdot\text{ημΒΕΓ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{ΕΖ}\cdot 2R\,\text{ημΑ} = \text{ΕΒ}\cdot\text{ΕΓ}\cdot\text{ημΑ} \Rightarrow \text{ΕΖ} = \frac{\text{ΕΒ}\cdot\text{ΕΓ}}{2R}$

Αλλά $\widehat{\text{ΖΔΕ}} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = \widehat{\text{ΑΗΕ}}$ οπότε $\text{Ε}\overset{\triangle}{\text{Ζ}}\text{Δ} \sim \text{Α}\overset{\triangle}{\text{Ε}}\text{Η}$.

Έτσι: $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΔ}} = \frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΕΔ}} \Rightarrow \frac{\frac{\text{ΕΒ}+\text{ΕΓ}}{\text{ΕΒ}\cdot\text{ΕΓ}}}{R} = \frac{2R}{\text{ΕΔ}} \Rightarrow \frac{1}{\text{ΕΔ}} = \frac{1}{\text{ΕΒ}} + \frac{1}{\text{ΕΓ}}$

Α36. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma$$

Λ. Ιωσηφίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ., Συγκελάκης Α., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Είναι $(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$

$\Leftrightarrow 2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$

Έτσι $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$ και όμοια παίρνουμε: $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} \geq \frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geq \frac{\gamma+\alpha}{2}$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις προηγούμενες ανισότητες, προκύπτει το ζητούμενο.

Α37. Να λυθεί η εξίσωση :

ημx + συνx = εφx + σφx.

Π. Μυταρέλλης

Λύσεις έστειλαν οι: Μυταρέλλης Π., Συγκελάκης Α.

Λύση :

Είναι $\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| \geq 2\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ οπότε $|\text{εφ}x + \text{σφ}x| \geq 2$

Ακόμη $|\text{ημ}x + \text{συν}x| \leq 1 + 1 = 2\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Αν ήταν $|\text{ημ}x + \text{συν}x| = 2 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x + \text{συν}^2x + 2\text{ημ}x\text{συν}x = 4 \Leftrightarrow \text{ημ}x\cdot\text{συν}x = \frac{3}{2}$,

άτοπο αφού $\text{ημ}x\cdot\text{συν}x \leq 1\cdot 1 = 1$

Έτσι $|\text{ημ}x + \text{συν}x| < 2 \leq |\text{εφ}x + \text{σφ}x|$ και η εξίσωση ημx + συνx = εφx + σφx είναι αδύνατη.

Α38. Να δείξετε ότι:

i) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ αν $\alpha > 0$

ii) $\text{ημ}x + \text{συν}x < 2$

iii) Να λυθεί η εξίσωση

$(\alpha^2+1)(\text{ημ}x - \text{συν}x) - \alpha(\text{ημ}^2x - \text{συν}^2x) = 0$

Π. Γουτζίδης

Λύση έστειλε ο Συγκελάκης Α.

Λύση :

i) Είναι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+1-2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0$

που ισχύει

ii) Έχουμε $\text{ημ}x \leq 1$, $\text{συν}x \leq 1$ άρα $\text{ημ}x + \text{συν}x \leq 2$.

Αν ήταν $\text{ημ}x + \text{συν}x = 2$ . . . άτοπο (δες Α37). Ώστε : $\text{ημ}x + \text{συν}x < 2$

iii) Για $\alpha > 0$ έχουμε:

$(\alpha^2+1)(\text{ημ}x - \text{συν}x) - \alpha(\text{ημ}x + \text{συν}x)(\text{ημ}x - \text{συν}x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\text{ημ}x - \text{συν}x)\left[(\alpha^2+1) - \alpha(\text{ημ}x + \text{συν}x)\right] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{συν}x$ ή $\frac{\alpha^2+1}{\alpha} = \text{ημ}x + \text{συν}x$ (αδύνατη λόγω (i), (ii)

$\Leftrightarrow \text{εφ}x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

Α39. Δίνεται 2x2 γραμμικό σύστημα (Σ) για το οποίο $\frac{D_y}{D} + \frac{D}{D_y} \leq 2$.

Αν (x_o, y_o) λύση του (Σ) και το σημείο $M(x_o, y_o)$ βρίσκεται στην παραβολή $y = x^2 - 2x + 2$, να λυθεί το (Σ).

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Συγκελάκης Α.

Λύση :

Είναι $y_o = x_o^2 - 2x_o + 2 = (x_o-1)^2 + 1 > 0$

άρα $y_o > 0$.

Προφανώς $D \neq 0$ οπότε το (Σ) έχει μοναδική λύση (x_o, y_o) με $y_o = \frac{Dy}{D}$.

Η ανισότητα $\frac{Dy}{D} + \frac{D}{Dy} \leq 2$ γράφεται $y_o + \frac{1}{y_o} \leq 2 \overset{y_o>0}{\Leftrightarrow} y_o^2 + 1 \leq 2y_o \Leftrightarrow (y_o-1)^2 \leq 0$

οπότε $y_o = 1$. Έτσι: $1 = x_o^2 - 2x_o + 2 \Leftrightarrow (x_o-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_o = 1$ και τελικά

$(\Sigma) \Leftrightarrow (x_o, y_o) = (1, 1)$.

Α40. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$x^2 \leq 11 - 6\sqrt{2}$$

Δ. Κατσιούλης - Θ. Νίκου

Λύση έστειλε ο Συγκελάκης Α.

Λύση :

Είναι $11 - 6\sqrt{2} = (3-\sqrt{2})^2$ άρα

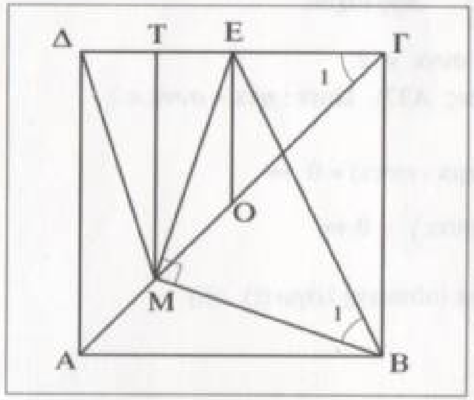
$x^2 \leq 11 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow |x| \leq |3-\sqrt{2}| \Leftrightarrow$

$|x| \leq 3 - \sqrt{2}$

αφού $3 - \sqrt{2} > 0$. Έτσι $|x| = 0$ ή $|x| = 1$ οπότε $x = 0$ ή $= 1$ ή $x = -1$

A41. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το μέσο Ε της ΓΔ και σημείο Μ στη διαγώνιο ΑΓ ώστε $\widehat{BME}=90°$.
Να αποδειχθεί ότι ΓΜ = 3ΜΑ.

Μπάμπης Στεργίου



Λύση έστειλε ο Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Επειδή $\widehat{EMB} = \widehat{E\Gamma B} = 90°$, τα Μ, Γ βρίσκονται στον κύκλο διαμέτρου ΒΕ. Για το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι: ΜΑ = ΜΟ, όπου Ο το κέντρο του τετραγώνου. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΜΕΓ έχουμε:

$\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 45°$ οπότε $\overset{\triangle}{BME}$ ισοσκελές και ΒΜ = ΜΕ. Ακόμη είναι ΒΜ = ΜΔ $\left[\text{αφού } \overset{\triangle}{MAB} = \overset{\triangle}{MA\Delta}\right]$.

Έτσι ΜΕ = ΜΔ, δηλαδή το Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΔΕ. Αν Τ το μέσο του ΔΕ, αφού ΔΑ // ΤΜ // ΕΟ, συμπεραίνουμε ότι το Μ είναι μέσο του ΑΟ.

A42. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x ώστε
$x^2+x+1,\ 2x+1,\ x^2+1$
να είναι μέτρα πλευρών τριγώνου. Πότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και πότε ισόπλευρο;

Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

Έστω $\alpha = x^2+x+1$, $\beta = 2x+1$, $\gamma = x^2+1$.

Είναι α, γ>0 $\forall x\in\mathbb{R}$ και $\beta>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$ (1).

Στη συνέχεια βρίσκουμε ποια είναι η μεγαλύτερη πλευρά.
Είναι $\alpha - \gamma = x$, $\gamma - \beta = x(x-2)$, $\alpha - \beta = x^2 - x$. Έτσι:

- αν $-\dfrac{1}{2} < x < 0$, μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\gamma = x^2+1$,
- αν $0 < x < 1$, μεγαλύτερη πλευρά είναι $\beta = 2x+1$,
- αν $x > 1$, μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\alpha = x^2+x+1$,

Για x = 0 είναι α = β = γ = 1 (ισόπλευρο τρίγωνο)
Για x = 1 είναι α = β = 3, γ = 2 (ισοσκελές τρίγωνο)

- Έστω $-\dfrac{1}{2} < x < 0$. Για να είναι οι α, β, γ πλευρές τριγώνου πρέπει $\gamma < \alpha + \beta \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$ (2)

- Έστω $0 < x < 1$. Πρέπει: $\beta < \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 > 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$
- Έστω $x > 1$. Πρέπει: $\alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > -1$, ισχύει λόγω της (1).

Τελικά από (1), (2) παίρνουμε $x > -\dfrac{1}{3}$.

A43. **α)** Να λυθεί η εξίσωση
$6\alpha x^2 - (4\alpha^2+9)\cdot x + 6\alpha = 0,\ \alpha \neq 0.$
β) Να συγκριθούν οι ρίζες της, για $\alpha \neq 0$.

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

α) Είναι $\Delta = (4\alpha^2+9)^2 - 4\cdot 6\alpha\cdot 6\alpha =$
$(4\alpha^2+9)^2 - (12\alpha)^2 =$
$(4\alpha^2+9-12\alpha)(4\alpha^2+9+12\alpha) =$
$(2\alpha+3)^2\cdot(2\alpha-3)^2 = (4\alpha^2-9)^2 \geq 0$

και η εξίσωση έχει ρίζες ... $x_1 = \dfrac{2\alpha}{3}$, $x_2 = \dfrac{3}{2\alpha}$.

β) Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{3}{2}$ ή $\alpha = \dfrac{3}{2}$ τότε $x_1 = x_2$

Αν $\Delta > 0$ τότε $x_1 \neq x_2$. Ακόμη $x_1 - x_2 = \dfrac{2\alpha}{3} - \dfrac{3}{2\alpha} = \dfrac{4\alpha^2-9}{6\alpha}$ οπότε

$x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow (4\alpha^2-9)\cdot 6\alpha > 0$. Έχουμε τον πίνακα:

α	−∞	−	−3/2	−	0	+	3/2	+	+∞
$4\alpha^2-9$		+	0	−	‖	−	0	+	
$\alpha(4\alpha^2-9)$		−	0	+	‖	−	0	+	

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι:

- $x_1 > x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow \alpha\in\left(-\infty, -\dfrac{3}{\alpha}\right)\cup\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow \alpha\in\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)\cup\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

A44. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90°\right)$ και $\widehat{B} = 3\widehat{\Gamma}$.
Να δειχθεί ότι $\beta^2 - \gamma^2 = 2\beta\gamma$.

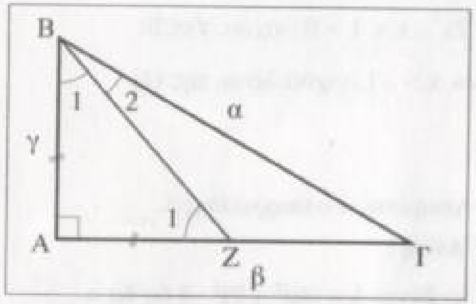
Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλαν οι: Μυταρέλλης Π., Συγκελάκης Α., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Παίρνουμε σημείο Ζ επί της ΑΓ: ΑΒ = ΑΖ = γ

Τότε $\widehat{B}_1 = \widehat{Z}_1 = 45°$. Αφού $\widehat{B} = 3\widehat{\Gamma}$ θα είναι $\widehat{\Gamma} = \dfrac{1}{4}\cdot 90° = \widehat{B}_2$.



Έτσι $BZ=Z\Gamma=x$. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABZ: $x^2=2\gamma^2$. Ακόμη:

$A\Gamma = AZ + Z\Gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma + x \Leftrightarrow$

$\beta^2 = \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x \Leftrightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 2\gamma^2 + 2\gamma x \Leftrightarrow$

$\beta^2 - \gamma^2 = 2\gamma(\gamma + x) \Leftrightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 2\beta\gamma$

Λύση έστειλε ο Συγκελάκης Α.

Α45. Αν $\alpha+\beta=\lambda$ και $\alpha\cdot\beta=\mu$ να βρεθούν τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε

$\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2 - 10(\alpha+\beta+\alpha\beta) + 61 = 0$

Π. Γουτζίδης

Λύση :

Είναι $(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha\beta)^2 - 10(\alpha+\beta) - 10\alpha\beta + 61 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2 - 10(\alpha+\beta) + (\alpha\beta)^2 - 12\alpha\beta + 61 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 + \mu^2 - 12\mu + 36 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-5)^2 + (\mu-6)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 5 = 0$ και $\mu - 6 = 0$ οπότε $(\lambda, \mu) = (5, 6)$.

Α46. Να εξετασθεί αν το σημείο N(1, 1) βρίσκεται μέσα ή έξω από την ζώνη των παραλλήλων

$\varepsilon_1: 2x+3y-6=0$ και $\varepsilon_2: 2x+3y+3=0$

Ν. Ιωσηφίδης

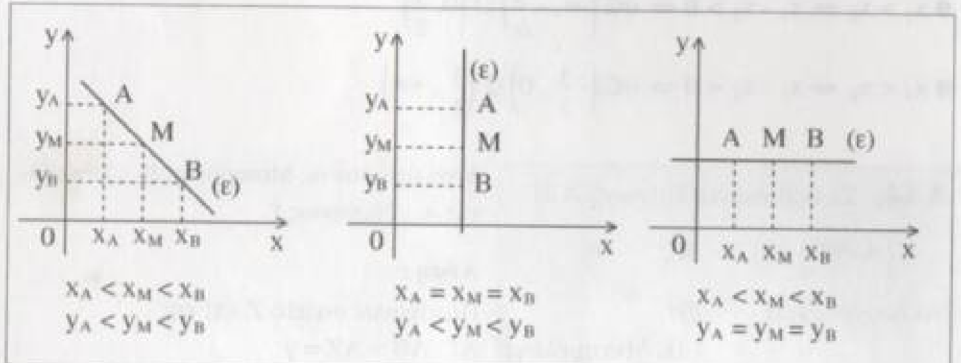
Λύση έστειλε ο Ιωσηφίδης Ν.

Λύση :

Θα χρησιμοποιήσουμε μία προφανή πρόταση:

Αν A, B, M σημεία ευθείας (ε) και ισχύει μία από τις σχέσεις

$x_A < x_M < x_B$ ή $x_B < x_M < x_A$ ή $y_A < y_M < y_B$ ή $y_B < y_M < y_A$ τότε το M βρίσκεται μεταξύ των A, B:

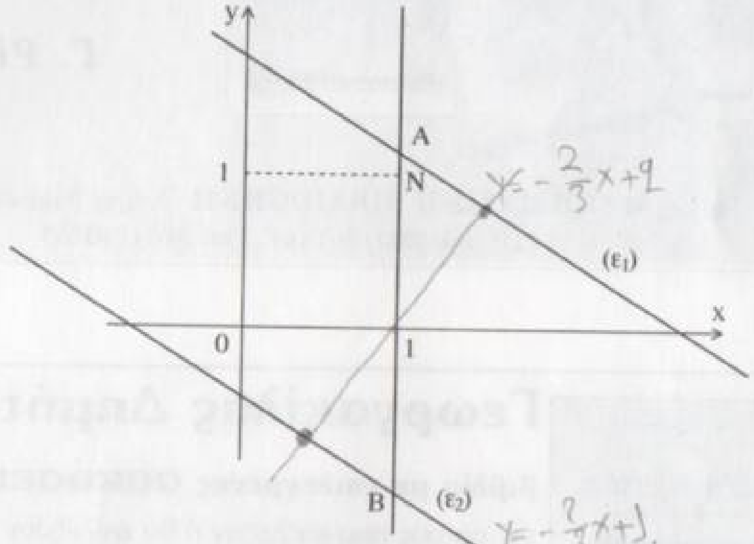


Λύση του προβλήματος:

Η ευθεία που περνά από το N(1, 1) και είναι κάθετη στον x'x έχει εξίσωση x = 1.

Τα σημεία τομής της με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι τα $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$, $B\left(1, -\frac{5}{3}\right)$.

Επειδή τώρα $y_B < y_N < y_A$, συμπεραίνουμε ότι το N βρίσκεται μεταξύ των A, B άρα μέσα στη ζώνη των παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.



ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Β΄ λυκείου

B1. Να δειχτεί ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

Χ. Βαφειάδης

Απόδειξη: (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Ονομάζουμε A το άθροισμα του πρώτου μέλους δηλ.

$$(1)\quad A=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7}$$

(Τα τόξα $\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7}$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega=\frac{2\pi}{7}$.)

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) επί $2\eta\mu\frac{\omega}{2}$ δηλ. $2\eta\mu\frac{\pi}{7}$ και έχουμε:

$$2\eta\mu\frac{\pi}{7}A=2\eta\mu\frac{\pi}{7}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+2\eta\mu\frac{\pi}{7}\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}+2\eta\mu\frac{\pi}{7}\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7}\Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\frac{\pi}{7}A=\eta\mu\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{7}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{7}-\frac{4\pi}{7}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\pi}{7}A=\eta\mu\frac{3\pi}{7}-\eta\mu\frac{\pi}{7}+\eta\mu\frac{5\pi}{7}-\eta\mu\frac{3\pi}{7}+\overset{0}{\eta\mu\frac{7\pi}{7}}-\eta\mu\frac{5\pi}{7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\pi}{7}A=-\eta\mu\frac{\pi}{7}\Leftrightarrow 2A=-1\Leftrightarrow A=-\frac{1}{2}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι γενική και εφαρμόζεται για τον υπολογισμό αθροίσματος συνημιτόνων και ημιτόνων τόξων τα οποία αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Δείτε π.χ. σελ. 171 του βιβλίου:

Άλγεβρα - Τριγωνομετρία Β΄ ΛΥΚΕΊΟΥ

ΗΛΙΑ . Β ΝΤΖΙΩΡΑ - ΙΩΑΝ. ΠΑΝΑΚΗ(ΟΕΔΒ ΑΘΗΝΑ 1980)

B2. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt{5-2\,\eta\mu\frac{1}{2}}>6\,\eta\mu\frac{1}{2}-1$$

Χ. Βαφειάδης

Απόδειξη: (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Πρώτα - πρώτα εύκολα διαπιστώνουμε από την $-1\le\eta\mu\omega\le 1$ ότι:

$5-2\eta\mu\omega>0\quad\forall\omega\in\mathbb{R}$ οπότε $5-2\eta\mu\frac{1}{2}^{\text{rad}}>0$ καθώς και ότι:

$$6\eta\mu\frac{1}{2}-1>0\quad\text{αφού}\quad\frac{\pi}{8}^{\text{rad}}<\frac{1}{2}^{\text{rad}}\Rightarrow\eta\mu\frac{\pi}{8}<\eta\mu\frac{1}{2}\Rightarrow 6\eta\mu\frac{\pi}{8}-1<6\eta\mu\frac{1}{2}-1$$

Όμως $\eta\mu\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (Δείτε σελίδα 19 ΑΛΓ., Β'ΛΥΚΕΙΟΥ), οπότε $6\eta\mu\frac{1}{2}-1>0$

Τότε η αποδεικτέα:

$$(1)\ \sqrt{5-2\eta\mu\frac{1}{2}}>6\eta\mu\frac{1}{2}-1\Leftrightarrow 5-2\eta\mu\frac{1}{2}>\left(6\eta\mu\frac{1}{2}-1\right)^2\Leftrightarrow$$

$$5-2\eta\mu\frac{1}{2}>36\eta\mu^2\frac{21}{2}-12\eta\mu\frac{1}{2}+1\Leftrightarrow 36\eta\mu^2\frac{21}{2}-10\eta\mu\frac{1}{2}-4<0\quad(2)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $36t^2-10t-4$ είναι οι $\frac{1}{2}$ και $-\frac{2}{9}$ οπότε η (2) γίνεται

$$36\left(\eta\mu\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\eta\mu\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\right)<0\qquad(3)$$

Είναι $\eta\mu\frac{1}{2}+\frac{2}{9}>0$ και αφού $\frac{\pi}{4}<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}\Rightarrow\eta\mu\frac{1}{2}<\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\eta\mu\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)<0$

Άρα η (3) αληθεύει οπότε και η ισοδυναμία της (1) αληθεύει.

__Διδακτική Σύνδεση:__ **Εκτός από τα βασικά που αφορούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ας υπενθυμίσουμε πότε είναι έγκυρη η ισοδυναμία**

$$\alpha\leq\beta\Leftrightarrow\alpha^2\leq\beta^2$$

B3. Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\eta\mu^{1996}\frac{A}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu^{3992}\frac{B}{4}=\eta\mu^{1996}\frac{B}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu^{3992}\frac{A}{4}$$

να δείξετε ότι είναι ισοσκελές.

Δ. Γαλανάκης

Απόδειξη: (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Ας υποθέσουμε ότι $A\neq B\Rightarrow\frac{A}{4}\neq\frac{B}{4}$

και έστω ότι π.χ. $A>B$

Τότε $\frac{A}{4},\frac{B}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και θα έχουμε:

$$\frac{A}{4}>\frac{B}{4}\Rightarrow\eta\mu\frac{A}{4}>\eta\mu\frac{B}{4}\qquad(1)$$

$$\frac{A}{4}>\frac{B}{4}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{A}{4}<\sigma\upsilon\nu\frac{B}{4}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αφού}\ \eta\mu\frac{A}{4}>\eta\mu\frac{B}{4}>0\Rightarrow\eta\mu^{1996}\frac{A}{4}>\eta\mu^{1996}\frac{B}{4}>0\\ \text{Αφού}\ \sigma\upsilon\nu\frac{B}{4}>\sigma\upsilon\nu\frac{A}{4}>0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu^{3992}\frac{B}{4}>\sigma\upsilon\nu^{3992}\frac{A}{4}>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ημ^{1995}\frac{A}{4}\,συν^{3992}\frac{B}{4} > ημ^{1995}\frac{B}{4}\,συν^{3992}\frac{A}{4},\ \text{άτοπο.}$$

Όμοια αποκλείεται να είναι $A < B$. Άρα $\mathbf{A = B}$.

B4. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{2}{\sqrt{4x+1}+1}+\dots+\frac{1995}{\sqrt{3990x+1}+1} > 995505$$

Π. Κουρσουμπάς

Λύση: (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Θα πρέπει

$2x+1 \geq 0$ και $4x+1 \geq 0$ και ... $3990x + 1 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq -\frac{1}{3990}} \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι για $x = 0$ η ανίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\dots+\frac{1995}{2} > 995505 \Leftrightarrow \frac{\frac{(1+1995)\,1995}{2}}{2} > 995505 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 995505 > 995505 \ \text{άτοπο.}$$

Άρα $\boxed{x \neq 0}$ (2)

Τότε πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τη συζυγή του παρονομαστή και η ανίσωση γίνεται:

$$\frac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}+2\,\frac{\sqrt{4x+1}-1}{4x}+3\,\frac{\sqrt{6x+1}-1}{6x}+\dots+1995\,\frac{\sqrt{3990x+1}-1}{3990x} > 995505$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+1}+\sqrt{6x+1}+\dots+\sqrt{3990x+1}-1995\right) > 995505 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2x}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+1}+\sqrt{6x+1}+\dots+\sqrt{3990x+1}-1995-1991010x\right) > 0} \quad (3)$$

Τώρα είναι:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+1}+\sqrt{6x+1}+\dots+\sqrt{3990x+1} \overset{x\neq 0}{<}$$

$$< \sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{4x^2+4x+1}+\dots+\sqrt{(1995x)^2+3990x+1} =$$

$$= \sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(2x+1)^2}+\dots+\sqrt{(1995x+1)^2} = |x+1|+|2x+1|+\dots+|1995x+1| \overset{x>-\frac{1}{3990}}{=\!=}$$

$= (x+1)+(2x+1)+(3x+1)+\dots+(1995x+1) = x\,(1+2+3+\dots+1995)+1995 =$
$= x\ 19911010 + 1995$. Έτσι

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+1}+\sqrt{3990x+1}-1995-1991010x < 0$ οπότε η (3) αληθεύει για:

$$\frac{1}{2x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Έτσι οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in \mathbb{R}$: $-\frac{1}{3990} \leq x < 0$

B5. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}} = 5$$

Π. Κουρσουμπάς

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η εξίσωση ορίζεται για
$x \in \{x \in \mathbb{R} / x-3 \geq 0$ και
$x-2-2\sqrt{x-3} \geq 0\}$

Η τελευταία γίνεται $x-2 \geq 2\sqrt{x-3} \overset{x\geq 3}{\Leftrightarrow} (x-2)^2 \geq 4(x-3) \Leftrightarrow x^2-4x+4 \geq 4x-12$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0.$$

Η τελευταία αληθεύει $\forall x \in \mathbb{R}$, άρα και $\forall x \geq 3$.

Έτσι η εξίσωση ορίζεται $\forall x \in [3, +\infty)$.

Τώρα είναι: $x-2-2\sqrt{x-3} = x-3-2\sqrt{x-3}+1 = \left(\sqrt{x-3}-1\right)^2$ και

$$x+1+4\sqrt{x-3} = x-3+4\sqrt{x-3}+4 = \left(\sqrt{x-3}+2\right)^2$$

Έτσι έχουμε:

$$(1)\ \sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-3}+2\right)^2} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-3}-1\right|+\left|\sqrt{x-3}+2\right| = 5 \ \text{ και } x \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-3}-1\right|+\sqrt{x-3}+2 = 5 \ \text{ και } x \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-3}-1\right|+\sqrt{x-3} = 3 \ \text{ και } x \geq 3 \qquad (2)$$



Επειδή το περιεχόμενο του απολύτου μηδενίζεται για $x = 4$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\boxed{3 \leq x < 4} \Rightarrow 0 \leq x-3 < 1 \Rightarrow \sqrt{x-3}-1 < 0 \Rightarrow \left|\sqrt{x-3}-1\right| = -\left(\sqrt{x-3}-1\right)$

και η (2) γίνεται: $-\left(\sqrt{x-3}-1\right)+\sqrt{x-3} = 3 \Leftrightarrow 1 = 3$ Αδύνατη.

ii) $\boxed{4 \le x} \Rightarrow x - 3 \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x-3} - 1 \ge 0 \Rightarrow \left|\sqrt{x-3} - 1\right| = \sqrt{x-3} - 1$

και η (2) γίνεται: $\sqrt{x-3} - 1 + \sqrt{x-3} = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 3 = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 7}$. Έτσι η ρίζα της (1) είναι η $\boxed{x = 7}$

B6. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες οι εξισώσεις

(E_1): $ημ3x = λημx + (4 - 2|λ|)\,ημ^2x$ και

(E_2): $ημ3x + συν2x = 1 + 2ημxσυν2x$

έχουν όλες τις ρίζες του κοινές.

Δ. Γαλανάκης

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η (E_2) (που δεν έχει παράμετρο) γίνεται:

$ημ3x + συν2x = 1 + 2ημxσυν2x \Leftrightarrow$

$ημ3x + συν2x = 1 + ημ(x+2x) + ημ(x - 2x) \Leftrightarrow$

$ημ3x + συν2x = 1 + ημ3x - ημx \Leftrightarrow$

$1 - 2ημ^2x - 1 + ημx = 0 \Leftrightarrow$

$2ημ^2x - ημx = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{ημx = 0}$ ή $\boxed{ημx = \frac{1}{2}}$

Έτσι όλες οι λύσεις της (E_2) είναι οι λύσεις των βασικών τριγων. εξισώσεων

$\boxed{ημx = 0}$ (1) και $\boxed{ημx = \frac{1}{2}}$ (2)

Απαιτούμε κάθε λύση της (1) και κάθε λύση της (2) να επαληθεύει και την (E_1).

Είναι φανερό ότι, επειδή $ημ3x = 3ημx - 4ημ^3x$, η (E_1) επαληθεύεται για $ημx = 0$.

Απαιτούμε τώρα η (E_2) να επαληθεύεται για $ημx = \frac{1}{2}$.

Η (E_1) γίνεται τότε $3ημx - 4ημ^3x = λημx + (4 - 2|λ|)ημ^2x \Leftrightarrow$

$$ημx\left(3 - 4ημ^2x\right) = ημx\left[λ + (4 - 2|λ|\,ημx)\right] \underset{ημx = \frac{1}{2}}{\overset{ημx \neq 0}{\Leftrightarrow}}$$

$$3 - 4ημ^2x = λ + (4 - 2|λ|)\,ημx \quad \text{και για} \quad ημx = \frac{1}{2}$$

$$3 - 4\frac{1}{2}^2x = λ + (4 - 2|λ|)\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 - 1 = λ + 2 - |λ| \Leftrightarrow$$

$$λ = |λ| \Leftrightarrow \boxed{λ \ge 0}$$

Έτσι για να είναι κάθε ρίζα της (E_2) και ρίζα της (E_1) πρέπει $\boxed{λ \ge 0}$

Αντίστροφα αν $λ \ge 0$ η (E_1) γίνεται:

$3ημx - 4ημ^3x = λημx + (4 - 2λ)ημ^2x \Leftrightarrow ημx\,[3 - 4ημ^2x - λ - (4 - 2λ)\,ημx] = 0 \Leftrightarrow$

$ημx\,[- 4ημ^2x - (4 - 2λ)ημx - (λ - 3)] = 0 \Leftrightarrow ημx\,[4ημ^2x - 2(2 - λ)\,ημx + (λ - 3)] = 0$

και αληθεύει για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$:

$ημx = 0$ ή $4ημ^2x - 2(2 - λ)ημx + (λ - 3) = 0$ (3)

Η τελευταία έχει

$Δ = 4(2 - λ)^2 - 4\cdot4(λ - 3) = 4[λ^2 - 4λ + 4 - 4λ + 12] = 4(λ - 4)^2 \ge 0 \quad \forall λ \in \mathbb{R}$

Για να συμβαίνει το ζητούμενο απαιτούμε η (3) να έχει διπλή ρίζα την $ημx = \frac{1}{2}$.

Αυτό συμβαίνει για $\boxed{λ = 4}$ όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί.

Ώστε για $λ = 4$ οι (E_1) και (E_2) έχουν όλες τις ρίζες τους κοινές.

(τις: $x = kπ$ $k \in \mathbb{Z}$ (από $ημx = 0$) και $x = 2kπ + \frac{π}{6}$ ή $x = 2kπ + \frac{5π}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$ απ' την $ημx = \frac{1}{2}$)

B7. Να βρεθούν τα σύνολα ορισμού (ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$) των συναρτήσεων

$f(x) = \ln\left(3 + 4x\sqrt{3 - 4x^2}\right)$ και

$g(x) = \ln\left(\sqrt{7 + x - 6\sqrt{x-2}} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}}\right)$

Ν. Μπομποτσιάρης

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

i) Για την πρώτη συνάρτηση απαιτούμε:

$x \in \left\{x \in \mathbb{R} / \ 3 - 4x^2 \ge 0 \text{ και } 3 + 4x\sqrt{3 - 4x^2} > 0\right\}$

Η $3 - 4x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3 \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) \le 0 \Leftrightarrow 4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \le 0$$

επομένως πρέπει $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

Η $3 + 4x\sqrt{3 - 4x^2} > 0 \Leftrightarrow 3 - 4x^2 + 4x\sqrt{3 - 4x^2} + 4x^2 > 0 \Leftrightarrow$ (εφόσον ισχύει η (1))

$$\left(\sqrt{3 - 4x^2}\right)^2 + 4x\sqrt{3 - 4x^2} + (2x)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3 - 4x^2} + 2x\right)^2 > 0$$

που ισχύει $\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Έτσι το σύνολο ορισμού της πρώτης είναι το $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

ii) Για τη δεύτερη απαιτούμε

$$x \in \left\{x \in \mathbb{R} / \ x - 2 \ge 0 \text{ και } 7 + x - 6\sqrt{x-2} \ge 0 \text{ και } x - 1 - 2\sqrt{x-2} \ge 0\right\}$$

$$- \left\{x \in \mathbb{R} / \ 7 + x - 6\sqrt{x-2} + x - 1 - 2\sqrt{x-2} = 0\right\}$$

Η πρώτη αληθεύει για $x \ge 2$ (2) ενώ για την $7 + x - 6\sqrt{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow$

$$x - 2 - 6\sqrt{x-2} + 9 \ge 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 6\sqrt{x-2} + 3^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2} - 3\right)^2 \ge 0$$

που ισχύει $\forall x \ge 2$. Το $\left(\sqrt{x-2}-3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 11$.

Η $x-1-2\sqrt{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow x-2-2\sqrt{x-2}+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 2\sqrt{x-2} + 1^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 \ge 0$ που ισχύει $\forall x \ge 2$. Το $\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Έτσι το σύνολο ορισμού είναι το $[2, +\infty)$.

B8. Αν $\alpha > 1$, να λυθεί η ανίσωση:

$$\sqrt[3]{(\eta\mu x)^{\log_{1/2}\alpha}} < \alpha^{\log_{1/8}(\sigma\upsilon\nu x)}$$

Δ. Γαλανάκης

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Πρέπει πρώτα - πρώτα

(1) $\boxed{\eta\mu x > 0}$ και $\boxed{\sigma\upsilon\nu x > 0}$ (2)

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\sqrt[3]{(\eta\mu x)^{\log_{1/2}\alpha}} < \alpha^{\log_{1/8}(\sigma\upsilon\nu x)} \Leftrightarrow (\eta\mu x)^{\frac{\log_{1/2}\alpha}{3}} < \alpha^{\log_{1/8}(\sigma\upsilon\nu x)} \overset{*}{\Leftrightarrow} (\eta\mu x)^{\frac{1}{3}\frac{\log\alpha}{\log 1/2}} < \alpha^{\frac{\log(\sigma\upsilon\nu x)}{\log 1/8}} \Leftrightarrow$$

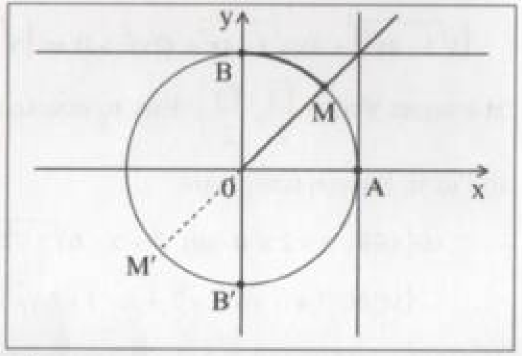
$$(\eta\mu x)^{\frac{\log\alpha}{-3\log 2}} < \alpha^{\frac{\log(\sigma\upsilon\nu x)}{-\log 2^3}} \Leftrightarrow (\eta\mu x)^{\frac{\log\alpha}{-3\log 2}} < \alpha^{\frac{\log(\sigma\upsilon\nu x)}{-3\log 2}} \xLeftrightarrow[\text{με βάση 10}]{\text{Λογαριθμίζουμε}}$$

$$\frac{\log\alpha}{-3\log 2}\log(\eta\mu x) < \frac{\log(\sigma\upsilon\nu x)}{-3\log 2}\log\alpha \xLeftrightarrow[\log\alpha > 0]{\alpha > 1} \log(\eta\mu x) > \log(\sigma\upsilon\nu x) \xLeftrightarrow{\log\uparrow}$$

$\boxed{\eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x}$ (3)

Ώστε η ανίσωση είναι ισοδύναμη με τις : $\begin{cases} \eta\mu x > 0 \\ \sigma\upsilon\nu x > 0 \\ \eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \eta\mu x > 0 \\ \sigma\upsilon\nu x > 0 \\ \varepsilon\varphi x > 1 \end{matrix}$

Τα πέρατα των τόξων x που επαληθεύουν τις παραπάνω βρίσκονται στο τόξο $\overset{\frown}{MB}$ (χωρίς τα άκρα) δηλ.



(4) $\boxed{\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}}$ οπότε

(5) $\overset{**}{\boxed{2k\pi + \dfrac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}}$ $k \in Z$

* **(Τύπος αλλαγής βάσης. Από βάση $\frac{1}{2}$ πήγαμε σε δεκαδικούς.)**

** **(Αν βάζαμε στη (5) $k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ για $k = 1$ θα είχαμε ρίζα με πέρατα στο $\overset{\frown}{M'B'}$ που δεν αποτελούν λύση. Μπορούσαμε να πούμε $k\pi + \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$ με k ΑΡΤΙΟ)**

B9. Να λυθεί η ανίσωση:

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2-x)\,2^x + 2^{x+1}\cdot x\sqrt{x-x^2}$$

Γ. Μαυρίδης

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η ανίσωση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$:

$2 - x^2 \ge 0$ και $x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

(δηλ. $0 \le x \le 1$). Θα έχουμε:

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2-x)\,2^x + 2^{x+1}\cdot x\sqrt{x-x^2} \Leftrightarrow$$

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} - 4 + (x-x^2)\,2^x - 2^{x+1}x\sqrt{x-x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} - 4 + 2^x\left[x - x^2 - 2x\sqrt{x-x^2} + x^2 - x^2\right] > 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} - 4 + 2^x\left[-x^2 + (x-x^2) - 2x\sqrt{x-x^2} + x^2\right] > 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} - 4 - 2^x x^2 + 2^x\left[\sqrt{x-x^2} - x\right]^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 8\sqrt{2-x^2} - (4 + 2^x x^2) + 2^x\left[\sqrt{x-x^2} - x\right]^2 > 0 \quad (1)$$

Είναι: i) $4x \ge 0$ αφού $0 \le x \le 1$ (το $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

ii) $8\sqrt{2-x^2} \ge 8$ αφού $0 \le x \le 1$ (το $8\sqrt{2-x^2} = 8 \Leftrightarrow x = 1$)

iii) $4 + 2^x x^2 \le 8 \Leftrightarrow 2^x x^2 \le 4$ αφού $\left.\begin{matrix} 0 < 2^x \le 2 \\ 0 \le x^2 \le 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \le 2^x x^2 \le 2$

Έτσι $4x + 8\sqrt{2-x^2} - (4 + 2^x x^2) + 2^x\left[\sqrt{x-x^2} - x\right]^2 > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [0, 1]$.

B10. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{2+\log_3 x}{x-1} \le \frac{6}{2(x-1)}$$

Γ. Σαράφης

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η $\frac{2+\log_3 x}{x-1} \le \frac{6}{2(x-1)}$ ορίζεται για $\forall x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

και είναι $\frac{2+\log_3 x}{x-1} \le \frac{6}{2(x-1)} \Leftrightarrow \frac{2+\log_3 x - 3}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3 x - 1}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(\log_3 x - 1) \le 0$

Είναι γνωστό ότι η: $\log_\alpha x$ είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ έτσι:

$\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$ ενώ αν $x > 3 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 3 = 1 \Rightarrow \log_3 x - 1 > 0.$

Τα προηγούμενα οδηγούν στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		3	
$x-1$		−	0	+		+
$\log_3 x-1$		−		−	0	+
$(\log_3 x-1)(x-1)$		+		−	0	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $1 < x \le 3$

B11. Να βρείτε για ποιές τιμές του x η συνάρτηση $f(x) = ημx + (x-4)^2 |ημx|$ παίρνει μη αρνητικές τιμές.

Χ. Βαφειάδης

Λύση έστειλε ο Χ. Βαφειάδης

Λύση :

$f(x) \ge 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 |ημx| \ge -ημx$

- Αν $ημx \ge 0$ η ανίσωση δεν επηρεάζεται από τον παράγοντα $(x-4)^2$
- Αν $ημx < 0$ η ανίσωση γίνεται

  $(x-4)^2(-ημx) \ge (-ημx)$, $(-ημx > 0) \Leftrightarrow (x-4)^2 \ge 1 \Leftrightarrow x \le 3$ ή $x \ge 5$.

Εξαιρείται λοιπόν από το R μόνο η τομή των διαστημάτων $(2κπ + π, 2κπ + 2π)$ και $(3, 5)$ άρα το διάστημα $(π, 5)$.

Τελικά $x \in R - (π, 5)$.

B12. Να υπολογιστεί η τιμή του

$$16^{1-\log_2 5} + 4^{\frac{1}{2}-\log_2 3+3\log_2 5}$$

Χ. Βαφειάδης

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Είναι

$$A = 16^{1-\log_2 5} + 4^{\frac{1}{2}-\log_2 3+3\log_2 5} =$$

$$= \left(2^4\right)^{\log_2 2-\log_2 5} + \left(2^2\right)^{\frac{\log_2 2}{2}-\log_2 3+\log_2 5^3} = 2^{4\log_2 2-4\log_2 5} + 2^{\log_2 2-2\log_2 3+2\log_2 5^3} =$$

$$= 2^{\log_2\left(\frac{2^4}{5^4}\right)} + 2^{\log_2 \frac{2\cdot 5^6}{3^2}} = 2^{\log_2\left(\frac{2}{5}\right)^4} + 2^{\log_2\left(\frac{2\cdot 5^6}{3^2}\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \frac{2\cdot 5^6}{3^2} = \ldots..$$

αφού $\theta = \alpha^{\log_\alpha \theta}$

B13. Να δείξετε ότι

$$\frac{\log 1+\log 2+\ldots+\log ν}{ν} > \frac{\log 1+\log 2+\ldots+\log(ν-1)}{ν-1}$$

και έπειτα ότι $\frac{(ν!)^{ν-1}}{[(ν-1)!]^ν} > 1.$

Ε. Μήτσιου

Λύση : (Γρηγόρης Ιωαν. Τσιτσίνιας)

Η αποδεικτέα γίνεται:

$(\log 1+\log 2+\ldots+\log ν)(ν-1) >$

$(\log 1+\log 2+\ldots+\log(ν-1))\,ν \Leftrightarrow$

$ν(\log 1+\log 2+\ldots+\log(ν-1)+\log ν) - (\log 1+\log 2+\ldots+\log ν) > (\log 1+\log 2+\ldots+\log(ν-1))\,ν \Leftrightarrow$

$ν\log ν+ν(\log 1+\log 2+\ldots+\log(ν-1)) - (\log 1+\log 2+\ldots+\log ν) > (\log 1+\log 2+\ldots+\log(ν-1))ν \Leftrightarrow$

$ν\log ν > \log 1+\log 2+\ldots+\log ν \Leftrightarrow \log ν^ν > \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots ν) \Leftrightarrow ν^ν > 1\cdot 2\cdot 3\ldots ν$ (2)

Η (2) είναι προφανής (για $ν \ge 2$).

Επίσης η (1) γράφεται:

$\frac{\log(1\cdot 2\cdot 3\ldots ν)}{ν} > \frac{\log[1\cdot 2\cdot 3\ldots(ν-1)]}{ν-1} \Leftrightarrow \frac{\log(ν!)}{ν} > \frac{\log(ν-1)!}{ν-1} \Leftrightarrow$

$(ν-1)\log(ν!) > ν\log(ν-1)! \Leftrightarrow \log\left[(ν!)^{ν-1}\right] > \log\left[(ν-1)!^ν\right] \Leftrightarrow$

$(ν!)^{ν-1} > \left[(ν-1)!\right]^ν \Leftrightarrow \frac{(ν!)^{ν-1}}{\left[(ν-1)!\right]^ν} > 1$

B14. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = εφ\frac{π}{20} - εφ\frac{3π}{20} - εφ\frac{7π}{20} + εφ\frac{9π}{20}$$

Π. Βασιλειάδης

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λεωνίδας, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Α., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Είναι $εφ9° - εφ27° - εφ63° + εφ81° = εφ9° - εφ27° - σφ27° + σφ9° =$

$$\left(\frac{ημ9^o}{συν9^o} + \frac{συν9^o}{ημ9^o}\right) - \left(\frac{ημ27^o}{συν27^o} + \frac{συν27^o}{ημ27^o}\right) = \frac{1}{ημ9^o\ συν9^o} - \frac{1}{ημ27^o\ συν27^o} =$$

$$\frac{2}{ημ18^o} - \frac{2}{ημ54^o} = 2\cdot\frac{ημ54^o - ημ18^o}{ημ18^o\ ημ54^o} = 2\cdot\frac{2ημ18^o\cdot συν36^o}{ημ18^o\cdot συν36^o} = 4$$

B15. Εάν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$συνΑ\cdot συνΒ\cdot συνΓ = \frac{1}{8}.$$

να δείξετε ότι είναι ισόπλευρο.

(θέμα εξετάσεων) **Δ. Γεωργακίλας**

Λύση έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Α.

Λύση :

$συνΑ \cdot συνΒ \cdot συνΓ = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$$\frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}\cdot\frac{α^2+γ^2-β^2}{2αγ}\cdot\frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (β^2+γ^2-α^2)(α^2+γ^2-β^2)(α^2+β^2-γ^2) = α^2β^2γ^2$$

Θέτοντας $β^2 + γ^2 - α^2 = x$, $α^2 + γ^2 - β^2 = y$, $α^2 + β^2 - γ^2 = ω$, η σχέση γράφεται

$$xyω = \frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+ω}{2}\cdot\frac{ω+x}{2} \Leftrightarrow (x+y)(y+ω)(ω+x) = 8xyω$$

Αλλά $\begin{cases} x + y \ge 2\sqrt{xy} \\ y + ω \ge 2\sqrt{yω} \\ ω + x \ge 2\sqrt{ωx} \end{cases}$ οπότε $(x+y)(y+ω)(ω+x) \ge 8xyω$ και το "=" ισχύει

όταν $x = y = ω$. Από $x = y$ έχουμε $β^2 + γ^2 - α^2 = α^2 + γ^2 - β^2 \Leftrightarrow α = β$ και όμοια $β = γ$. Έτσι $α = β = γ$ και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

B16. Αν μία διάμετρος κύκλου ακτίνας R τέμνει χορδή ΒΓ, εκτός του κύκλου σε σημείο Α και σχηματίζει μ' αυτή γωνία x και $B\hat{O}Γ = ω$, όπου Ο το κέντροτου κύκλου, να δείξετε ότι

$$ημx = \frac{R}{α}\cdot συν\frac{ω}{2},\ όπου\ α = (ΟΑ).$$

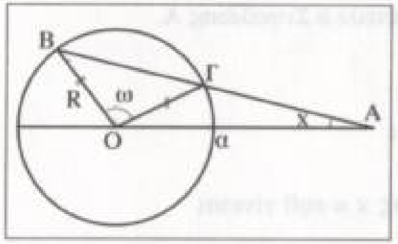
Θ. Ν. Καζαντζής

Λύση έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Θαρραλίδης Λεωνίδας, Σκοτίδας Σωτήρης, Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Από νόμο ημιτόνων στο $O\hat{A}B$:

$$\frac{(OB)}{ημx} = \frac{(OA)}{ημB} \Leftrightarrow ημx = \frac{R}{α}\cdot ημB \quad (1)$$



Όμως $O\hat{B}Γ$ ισοσκελές οπότε $B = \frac{π - ω}{2} = \frac{π}{2} - \frac{ω}{2}$

και $ημB = ημ\left(\frac{π}{2} - \frac{ω}{2}\right) = συν\frac{ω}{2}$

Έτσι: $(1) \Leftrightarrow ημx = \frac{R}{α}\cdot συν\frac{ω}{2}$

B17. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$$εφ^2Α+εφ^2Β+εφ^2Γ< (ημΑ+ημΒ+ημΓ)^2$$

να δείξετε ότι είναι αμβλυγώνιο.

Θ. Ν. Καζαντζής

Λύση έστειλε ο Ιωσηφίδης Λεωνίδας.

Λύση :

Έστω ότι $A\hat{B}Γ$ οξυγώνιο, οπότε

$εφΑ, εφΒ, εφΓ > 0$.

(Στο ορθογώνιο τρίγωνο δεν ορίζεται εφαπτομένη της ορθής).

Είναι $Α+Β = π - Γ \Rightarrow εφ(Α+Β) = εφ(π - Γ)$ απ' όπου βρίσκουμε:

$$εφΑ + εφΒ + εφΓ = εφΑ \cdot εφΒ \cdot εφΓ\ (= x).$$

Όμως $εφΑ+εφΒ+εφΓ \ge 3\cdot\sqrt[3]{εφΑ\cdot εφΒ\cdot εφΓ} \Leftrightarrow x \ge 3\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^3 \ge 27x \Leftrightarrow x^2 \ge 27$.

Ακόμη: $εφ^2Α+εφ^2Β+εφ^2Γ \ge 3\cdot\sqrt[3]{εφ^2Α\cdot εφ^2Β\cdot εφ^2Γ} \ge 3\sqrt[3]{27} = 9$

Τελικά: $εφ^2Α+εφ^2Β+εφ^2Γ \ge 9 \quad (1)$

Με το θεώρημα Euler είναι $ΟΗ^2 = 9R^2 - (α^2 + β^2 + γ^2)$ άρα $9R^2 \ge α^2+β^2+γ^2 \quad (2)$

Αλλά: $\begin{cases} α^2 + β^2 \ge 2αβ \\ β^2 + γ^2 \ge 2βγ \\ γ^2 + α^2 \ge 2αγ \end{cases} \Rightarrow 2α^2 + 2β^2 + 2γ^2 \ge 2(αβ + βγ + γα) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3α^2 + 3β^2 + 3γ^2 \ge (α + β + γ)^2$$

Τελικά $\frac{1}{3}(α + β + γ)^2 \le α^2 + β^2 + γ^2 \quad (3)$

Από (2), (3): $\frac{1}{3}(α + β + γ)^2 \le 9R^2 \Rightarrow (α + β + γ)^2 \le 27R^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [2R\ (ημΑ + ημΒ + ημΓ)]^2 \le 27R^2 \Rightarrow (ημΑ + ημΒ + ημΓ)^2 \le \frac{27}{4} < 9$$

οπότε, λόγω της (1): $(ημΑ + ημΒ + ημΓ)^2 < εφ^2Α + εφ^2Β + εφ^2Γ$, άτοπο. Ώστε το ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο τρίγωνο.

B18. Να λυθεί η εξίσωση

$$x^3 - 3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$$

Χ. Βαφειάδης

Λύση έστειλε ο Συγκελάκης Α.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται $\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \sqrt{3}$ και θέτοντας $x = εφθ$ γίνεται

$$\frac{3εφθ - εφ^3θ}{1 - 3εφ^2θ} = \sqrt{3} \Leftrightarrow εφ3θ = εφ\frac{π}{3} \Leftrightarrow 3θ = κπ + \frac{π}{3}\, κ \in Z$$

Τελικά $x_1 = εφ\dfrac{π}{9}$, $x_2 = εφ\dfrac{4π}{9}$, $x_3 = εφ\dfrac{7π}{9}$

B19. Να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt{ημx} + \sqrt{συνx} = α,\ α \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Θ.Ν.Καζαντζής

Λύση έστειλε ο Θ. Ν. Καζαντζής

Λύση :

Η συνθήκη $α > 0$ είναι αναγκαία για να έχει λύση η εξίσωση (1).

Το σύνολο ορισμού της (1) καθορίζεται από τις συνθήκες:

$$ημx \geq 0 \quad και \quad συνx \geq 0 \qquad (2)$$

Θέτουμε τώρα $x = 2kπ + y$, $k \in Z$ και $0 \leq y < 2π$.

Οι (1) και (2) γίνονται:

$$\sqrt{ημy} + \sqrt{συνy} = α \qquad (1')$$

και $\quad ημy \geq 0 \quad και \quad συνy \geq 0 \qquad (2').$

Οι (2') ισοδυναμούν με $0 \leq y \leq \dfrac{π}{2}$. Για την επίλυση της (1) λοιπόν, θα βρούμε τις λύσεις της (1') στο διάστημα $0 \leq y \leq \dfrac{π}{2}$.

Παρατηρούμε τώρα, ότι αν η (2') έχει μία λύση y θα έχει και την λύση:

$y_1 = \dfrac{π}{2} - y$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την λύση αυτής μέσα στο διάστημα $0 \leq y \leq \dfrac{π}{4}$.

Θέτουμε $\sqrt{συνy} - \sqrt{ημy} = ω$. Εφ' όσον $0 \leq y \leq \dfrac{π}{4}$ πρέπει $συνy \geq ημy$ και άρα $ω \geq 0$.

Θα είναι $2\sqrt{συνy} = α + ω$ και $2\sqrt{ημy} = α - ω$.

Συμπεραίνουμε ότι: $16συν^2y = (α + ω)^4$ και $16ημ^2y = (α - ω)^4$.

Οδηγούμαστε λοιπόν στην λύση της εξίσωσης:

$$(α + ω)^4 + (α - ω)^4 = 16 \qquad (3)$$

Η (3) γίνεται $\quad 2ω^4 + 12α^2ω^2 + 2α^4 = 16$

ή και $\quad ω^4 + 6α^2ω^2 + α^4 - 8 = 0.$

Λύνοντας ως προς $ω^2$ βρίσκουμε:

$$ω^2 = -3α^2 \pm \sqrt{8α^4 + 8}.$$

Επειδή $ω^2 > 0$, πρέπει να είναι: $-3α^2 + \sqrt{8α^4 + 8} > 0$, σχέση που οδηγεί στην $α < \sqrt[4]{8}$.

Με $0 < α < \sqrt[4]{8}$ βρίσκουμε $ω = \sqrt{-3α^2 + \sqrt{8α^4 + 8}}$.

Επειδή $\sqrt{συνy} = \dfrac{α+ω}{2}$ και $\sqrt{ημy} = \dfrac{α-ω}{2}$, πρέπει να είναι και $α - ω \geq 0 \Leftrightarrow ω \leq α$.

Έτσι $ω^2 \leq α^2 \Leftrightarrow 8α^4 + 8 \leq 16α^4$. Βρίσκουμε $α^4 \geq 1$ δηλαδή $α \geq 1$.

Τελικά πρέπει $1 \leq α \leq \sqrt[4]{8}$. $\qquad (4)$

Με την προϋπόθεση (4) είναι $ω = \sqrt{-3α^2 + \sqrt{8α^4 + 8}}$.

Οι τιμές του y βρίσκονται από το σύστημα

$$\sqrt{συνy} = \frac{α+ω}{2} \quad και \quad \sqrt{ημy} = \frac{α-ω}{2} \quad και \quad 0 \leq y \leq \frac{π}{4}.$$

Αυτό έχει μία λύση, έστω y_o. Τότε υπάρχει και η λύση $y_1 = π/2 - y_o$.

Η λύση της αρχικής είναι : $x = 2kπ + y_o$, $k \in Z$, $x = 2kπ + π/2 - y_o$, $k \in Z$.

B20. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left(x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x + \frac{2}{x}}\right)^2 = \frac{49}{9}$$

Χ. Λώλης

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λεωνίδας, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Α.

Λύση :

Θέτοντας $x + \dfrac{2}{x} = ω$ η εξίσωση γράφεται $\left(ω - \dfrac{2}{ω}\right)^2 = \dfrac{49}{9}$ άρα $ω - \dfrac{2}{ω} = \dfrac{7}{3}$ ή $ω - \dfrac{2}{ω} = -\dfrac{7}{3}$

Στην 1η περίπτωση έχουμε $3ω^2 - 7ω - 6 = 0 \Leftrightarrow ω = 3$ ή $ω = -\dfrac{2}{3}$

οπότε $\begin{cases} x + \dfrac{2}{x} = 3, \\ x + \dfrac{2}{x} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ απ' όπου βρίσκουμε $x = 1$ ή $x = 2$.

Όμοια στην περίπτωση $ω - \dfrac{2}{ω} = -\dfrac{7}{3}$ βρίσκουμε $x = -1$ ή $x = -2$.

B21. Αν το πολυώνυμο

$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

έχει παράγοντα το x+1, να δείξετε ότι

$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq 1$

Δ. Γεωργακίλας

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λεωνίδας, Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Α.

Λύση :

Είναι $f(-1) = 0$ δηλ. $\alpha - \beta + \gamma = 1 \Rightarrow |\alpha - \beta + \gamma| = 1$.

Όμως $|\alpha - \beta + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ άρα $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq 1$

B22. Να δείξετε ότι αν το πολυώνυμο

$g(x) = x^2 + x + \alpha$, α ακέραιος,

είναι διαιρέτης του πολυωνύμου

$f(x) = x^{13} + x + 90$, θα είναι τότε $\alpha > 0$.

Θ.Ν.Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Σκοτίδας Σωτήρης, Συγκελάκης Α.

Λύση 1η:

Έστω $x^3 + x + 90 = (x^2 + x + \alpha) \cdot \Pi(x)$ (1)

όπου Π(x) πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Αν $\alpha \leq 0$ τότε το g(x) θα έχει ρίζες (αφού $\Delta = 1 - 4\alpha > 0$) τους αριθμούς $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}$ από τους οποίους ο $\frac{-1 + \sqrt{1-4\alpha}}{2}$ είναι μη αρνητικός.

Λόγω της (1) συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^{13} + x + 90$ θα έχει αρνητική ρίζα, πράγμα φυσικά αδύνατο. Έτσι $\alpha > 0$.

• Προσδιορισμός του α

Για $x = -1$: $\alpha \cdot \Pi(-1) = 88$

Για $x = 0$: $\alpha \cdot \Pi(0) = 90$

Για $x = 1$: $(\alpha + 2) \cdot \Pi(1) = 92$

Έτσι: $\alpha \cdot (\Pi(0) - \Pi(-1)) = 2 \Rightarrow \alpha | 2 \Rightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = 2$

Αν όμως $\alpha = 1$ τότε $3 \cdot \Pi(1) = 92$ οπότε $3|92$, άτοπο. Τελικά $\alpha = 2$.

Λύση 2η:

Είναι $f'(x) = 13x^2 + 1 > 0$ άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

Έτσι $\Delta_g \leq 0 \Rightarrow 1 - 4\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq \frac{1}{4} > 0$

B23. Να βρείτε τους $k, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = kx^{\nu+1} + \lambda x^{\nu} + 1$, όπου ν θετικός ακέραιος, να έχει παράγοντα το $x^2 - 2x + 1$.

Δ. Γεωργακίλας

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Θαρραλίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Α.

Λύση :

Θέλουμε το P(x) να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ δηλ. διπλή ρίζα το $x_o = 1$. Από το σχήμα Horner:

κ	λ	0	...	0	1	ρ = 1
	κ	κ + λ	...	κ + λ	κ + λ	
κ	κ + λ	κ + λ	...	κ + λ	κ + λ + 1	

Πρέπει λοιπόν

$\kappa + \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = -1$, οπότε

$P(x) = (x-1) \cdot [\kappa \cdot x^{\nu} + (\kappa + \lambda) \cdot x^{\nu-1} + ... + (\kappa + \lambda)] = (x-1) \cdot [\kappa \cdot x^{\nu} + (-1) \cdot x^{\nu-1} + ... + (-1)]$.

Έστω $Q(x) = \kappa \cdot x^{\nu} + (-1) \cdot x^{\nu-1} + ... + (-1)$. Το P(x) έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ μόνον όταν το Q(x) έχει παράγοντα το x - 1, ισοδύναμα όταν :

$Q(1) = 0 \Leftrightarrow \kappa + \underbrace{(-1) + (-1) + ... + (-1)}_{\nu \text{ φορές}} = 0 \Leftrightarrow \kappa - \nu = 0$. Έτσι $\kappa = \nu$ οπότε $\lambda = -\nu - 1$

B24. Να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$f(x) = \frac{x^4 - \alpha x^3 + 4x^2 + (\beta - 2)x + \alpha + 1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$

και $f(1) = 4$, να είναι παραβολή.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Θαρραλίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Α.

Λύση :

Πρέπει το πολυώνυμο $g(x) = x^4 - \alpha x^3 + 4x^2 + (\beta - 2) \cdot x + \alpha + 1$ να έχει διπλή ρίζα το $x_o = 1$. Όπως στην B23 βρίσκουμε $\alpha = 2$, $\beta = -4$. Τότε:

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$ δηλαδή $f(x) = x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

B25. Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $5^{\log_5^2 x} + 2x^{\log_5 x} = 15$

β) $2\log_2^4 x + \log_2^3 \frac{x}{4} + 9\log_2 8x = 8\log_2^2 2x + 15\log_8 2$

γ) $27^{\log_x 25} = \frac{125}{9} x$

Χ. Λώλης

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Θαρραλίδης Λεωνίδας, Συγκελάκης Α.

Λύση :

α) $5^{\log_5^2 x} + 2x^{\log_5 x} = 15 \Leftrightarrow$

$\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} + 2x^{\log_5 x} = 15 \Leftrightarrow$

$x^{\log_5 x} + 2x^{\log_5 x} = 15 \Leftrightarrow 3x^{\log_5 x} = 15 \Leftrightarrow x^{\log_5 x} = 5 \Leftrightarrow \log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 5 \Leftrightarrow \log_5^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\log_5 x = 1$ ή $\log_5 x = -1 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = \frac{1}{5}$

β) Η εξίσωση γράφεται:

$$2(\log_2 x)^4 + (\log_2 x - \log_2 4)^3 + 9(\log_2 8 + \log_2 x) = 8(\log_2 2 + \log_2 x)^2 + \frac{15}{\log_2 8}$$

Θέτοντας $\log_2 x = \omega$ γίνεται: $2\omega^4 + (\omega - 2)^3 + 9(\omega + 3) = 8(\omega + 1)^2 + 15\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$2\omega^4 + \omega^3 - 14\omega^2 + 5\omega + 6 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = 2$ ή $\omega = -3$ ή $\omega = -\frac{1}{2}$

Τελικά: $x = 2$ ή $x = 4$ ή $x = \frac{1}{8}$ ή $x = 2^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ) Λογαριθμώντας έχουμε ισοδύναμα:

$$\log_{27}\left(\frac{125}{9}x\right) = \log_{27}\left(27^{\log_x 25}\right) \Leftrightarrow \log_{27}125 + \log_{27}x - \log_{27}9 = \log_x 25 \Leftrightarrow$$

$\log 125 \cdot \log x + \log^2 x - \log 9 \cdot \log x = \log 25 \cdot \log 27 \Leftrightarrow$

$\log^2 x + (3\log 5 - 2\log 3)\cdot \log x - 6\log 5 \cdot \log 3 = 0$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα $\Delta = \dots = (3\log 5 + 2\log 3)^2$ και ρίζες ... $2\log 3, -3\log 5$.

Έτσι: $\begin{cases} \log x = 2\log 3 = \log 9 \Leftrightarrow x = 9 \\ \text{ή} \\ \log x = -3\log 5 = \log 5^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{125} \end{cases}$

B26. Να συμπληρωθεί ο τελευταίος όρος στην ακολουθία των αριθμών

2	12	34	74	138	232	

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ιωσηφίδης Λ., Τσιτσίνιας Γ.

Οι Ν. - Γ. Ιωσηφίδης εύστοχα παρατηρούν ότι όταν δοθούν 6 διαδοχικοί όροι ακολουθίας, δεν προσδιορίζεται ο τύπος της ακολουθίας (αφού υπάρχουν άπειρες δυνατές ακολουθίες με αυτούς τους πρώτους όρους), συνεπώς ούτε και οι επόμενοι όροι.
Η λύση που ακολουθεί, αντιμετωπίζει την άσκηση στα πλαίσια ενός "παιχνιδιού" πνευματικού, όπου στην ουσία, βρίσκεται η απλούστερη από όλες τις δυνατές ακολουθίες.

Λύση :

Παρατηρούμε ότι οι διαφορές των διαφορών των όρων της ακολουθίας σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο:

(α_ν):	2		12		34		74		138		232
		(-)		(-)		(-)		(-)		(-)	
(β_ν):		10		22		40		64		94	
			(-)		(-)		(-)		(-)		
(γ_ν):			12		18		24		30		

Έτσι ο επόμενος όρος της (γ_ν) είναι $30 + 6 = 36$ οπότε της (β_ν) είναι $94 + 36 = 130$ και ο ζητούμενος αριθμός είναι: $232 + 130 = 362$

B27. α) Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{\underbrace{11\,1\dots11}_{2\nu} - \underbrace{2\,22\dots22}_{\nu}} = \underbrace{3\,33\dots3}_{\nu}$$

β) Να υπολογιστεί ο αριθμός

$$x = \sqrt{1111111 - 2222} - \sqrt{111111 - 222}$$

Χ. Λώλης

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Θαρραλίδης Λεωνίδας, Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

α) $333\dots333 = 3\cdot1 + 3\cdot10^1 + 3\cdot10^2 + \dots + 3\cdot10^{\nu-1} = 3\cdot\frac{10^\nu - 1}{10 - 1} = \frac{10^\nu - 1}{3}$

$111\cdots111 = \dots = \frac{10^{2\nu} - 1}{9}$, $222\cdots222 = 2\cdot\frac{10^\nu - 1}{9}$

Έτσι: $111\cdots111 - 222\cdots222 = \frac{10^{2\nu} - 1}{9} - 2\cdot\frac{10^\nu - 1}{9} = \dots = \frac{(10^\nu - 1)^2}{9}$

δηλαδή: $\underbrace{111\cdots111}_{2\nu} - \underbrace{222\cdots222}_{\nu} = \underbrace{333\cdots333}_{\nu}$

β) Από το (α): $\sqrt{1111111 - 2222} - \sqrt{111111 - 222} = 3333 - 333 = 3000$

B28. Να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \dots + 2\sqrt{3x}}}} = x$$

Θ.Ν.Καζαντζής

Λύσεις έστειλε ο Θ.Ν.Καζαντζής.

Λύση :

Κατ' αρχήν πρέπει $x \ge 0$. Θέτουμε:

$$R_\nu = \sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{\dots + 2\sqrt{3x}}}}$$ (με ν ριζικά).

Τότε η εξίσωση γράφεται

$$R_\nu = x \ (1) \Leftrightarrow 2R_\nu = 2x \Leftrightarrow 2R_\nu + x = 3x \Leftrightarrow \sqrt{x + 2R_\nu} = \sqrt{3x} \Leftrightarrow R_{\nu+1} = R_1 \qquad (2)$$

Επειδή $R_{\nu+1} = \sqrt{x + 2R_\nu}$ θα είναι $R^2_{\nu+1} = x + 2R_\nu$ και $R^2_\nu = x + 2R_{\nu-1}$.

Με αφαίρεση παίρνουμε: $(R_{\nu+1} - R_\nu)(R_{\nu+1} + R_\nu) = 2(R_\nu - R_{\nu-1})$. Αφού για $x \geq 0$ είναι $R_\nu \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι οι διαφορές $R_{\nu+1} - R_\nu$, $R_\nu - R_{\nu-1}$ είναι ομόσημες με την ευρεία σημασία. Ακόμη, ότι δύο διαδοχικές διαφορές έχουν τις ίδιες ρίζες, οπότε οι $R_2 - R_1, R_3 - R_2, \ldots, R_{\nu+1} - R_\nu$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

Η (1) έχει πάρει τη μορφή (2), η οποία γράφεται

$$(R_{\nu+1} - R_\nu) + (R_\nu - R_{\nu-1}) + \ldots + (R_2 - R_1) = 0$$

και επειδή οι διαφορές των παρενθέσεων είναι ομόσημες με την ευρεία έννοια, για να επαληθευτεί η εξίσωση, πρέπει και αρκεί:

$$R_{\nu+1} - R_\nu = 0 \ \text{και} \ R_\nu - R_{\nu-1} = 0 \ \text{και} \ldots \ R_2 - R_1 = 0$$

οπότε $(1) \Leftrightarrow R_2 - R_1 = 0 \Leftrightarrow R_2 = R_1 \Leftrightarrow \sqrt{x + 2\sqrt{3x}} = \sqrt{3x} \Leftrightarrow x + 2\sqrt{3x} = 3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x} = x \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ή} \ x = 3.$$

B29. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (1 - x + x^2 - \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} + x^{100})$

δεν έχει όρους περιττού βαθμού.

Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

Από την ταυτότητα

$$x^{101} + 1 = (x+1)(x^{100} - x^{99} + x^{98} - \ldots - x + 1)$$

έχουμε

$$1 - x + x^2 \ldots - x^{99} + x^{100} = \frac{x^{101} + 1}{x + 1} \quad \text{οπότε } P(x) = \frac{x^{101} + 1}{x + 1} \cdot \frac{x^{101} - 1}{x - 1} = \frac{x^{202} - 1}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{(x^2)^{101} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)\left[(x^2)^{100} + (x^2)^{99} + \ldots + x^2 + 1\right]}{x^2 - 1} = x^{200} + x^{198} + \ldots + x^2 + 1$$

B30. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = \sqrt{\log_2^4 x - 6\log_2^3 x + 13\log_2^2 x - 12\log_2 x + 4} + |x^2 - \alpha x + \beta|$.

Αν η γραφική της παράσταση τέμνει τον x'x σε δύο σημεία να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Θ. Νίκου - Δ. Κατσιούλης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Τα σημεία τομής της C_f με την x'x, έστω $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_2^4 x - 6\log_2^3 x + 13\log_2^2 x - 12\log_2 x + 4} = 0 & (1) \\ \text{και} \\ |x^2 - \alpha x + \beta| = 0 & (2) \end{cases}$$

Θέτοντας $\omega = \log_2 x$, η (1) γράφεται $\omega^4 - 6\omega^3 + 13\omega^2 - 12\omega + 4 = 0$ και εύκολα βρίσκουμε ότι έχει δύο διπλές ρίζες $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$.

Έτσι $\log_2 x_1 = 1$, $\log_2 x_2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Όμως οι x_1, x_2 είναι ρίζες και της $(2) \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + \beta = 0$

Από τους τύπους του Vieta: $\alpha = x_1 + x_2 = 6$, $\beta = x_1 x_2 = 8$

B31. Να λυθεί η εξίσωση

$$\varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\varphi x = \sqrt{3}.$$

Π. Γουτζίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται: $\dfrac{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{1 + \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}} + \dfrac{1}{\varepsilon\varphi x} = \sqrt{3}$ και θέτοντας $\varepsilon\varphi x = \omega$, γίνεται:

$$\frac{\omega - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{1}{\omega} = \sqrt{3}. \text{ Μετά τις πράξεις βρίσκουμε: } \omega = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Έτσι $\varepsilon\varphi x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

B32. Δίνονται οι αριθμητικές πρόοδοι 1, 5, 9, ... και 4, 15, 26, ...

Να δείξετε ότι οι κοινοί τους όροι αποτελούν αριθμητική πρόοδο

Σ. Σκοτίδας

Λύση έστειλε ο Σκοτίδας Σ.

Λύση :

Η πρώτη πρόοδος έχει $\alpha_1 = 1$, $\omega_1 = 4$ ενώ η δεύτερη $\beta_1 = 4$, $\omega_2 = 11$.

Θεωρούμε έναν κοινό τους όρο (διαφορετικής τάξης, γενικά) και έστω $\alpha_\nu = \beta_\kappa$.

Τότε $\alpha_1 + (\nu - 1)\omega_1 = \beta_1 + (\kappa - 1)\omega_2 \Leftrightarrow 1 + (\nu - 1)4 = 4 + (\kappa - 1)11$ απ' όπου

βρίσκουμε $\kappa = \dfrac{\mathbf{4(\nu + 1)}}{\mathbf{11}}$

Όμως $\nu, \kappa \in \mathbb{N}^*$ και $11 \nmid 4$ οπότε $11 \mid (\nu + 1)$

Έτσι $(\nu + 1) =$ πολλ.11 δηλαδή $\nu + 1 = \rho \cdot 11$, $\rho \in \mathbb{N}^*$ συνεπώς $\nu = 11\rho - 1$. Οι κοινοί όροι, λοιπόν, των (α_ν), (β_κ) είναι της μορφής $\alpha_{11\rho - 1}$, $\rho \in \mathbb{N}^*$ δηλαδή οι $\alpha_{10}, \alpha_{21}, \alpha_{32} \ldots$ που εύκολα βρίσκουμε ότι είναι οι αριθμοί 37, 81, 125 . . . οι οποίοι σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με $\omega = 44$.

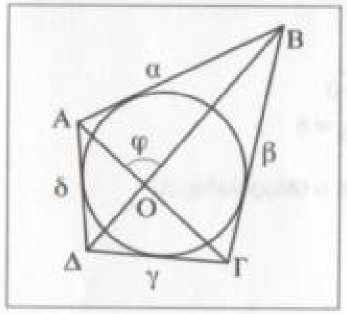
B33. Αν ΑΒΓΔ είναι τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ, να δειχθεί ότι $AB + \Gamma\Delta \geq 4\sqrt{2}\,\varrho$.

Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

Για το εμβαδό Ε του ΑΒΓΔ έχουμε:



$$E = (OAB) + (O\Gamma B) + (O\Gamma\Delta) + (O\Delta A) =$$
$$= \frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot \eta\mu\varphi + \frac{1}{2}OB\cdot O\Gamma\cdot \eta\mu(180 - \varphi)$$
$$+ \frac{1}{2}O\Gamma\cdot O\Delta\cdot \eta\mu\varphi + \frac{1}{2}O\Delta\cdot OA\cdot \eta\mu(180 - \varphi) =$$
$$= \frac{1}{2}\eta\mu\varphi(OA\cdot OB + OB\cdot O\Gamma + O\Gamma\cdot O\Delta + O\Delta\cdot OA) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left[OB(OA + O\Gamma) + O\Delta(OA + O\Gamma)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(OB + O\Delta)\,A\Gamma = \frac{1}{2}B\Delta\cdot A\Gamma$$

Έτσι $2E \leq B\Delta \cdot A\Gamma$ (1)

Εφόσον το ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο ακτίνας ρ, θα ισχύουν

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ και $E = \tau\cdot\varrho = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\varrho = (\alpha + \gamma)\,\varrho$

Όμως

$$\left.\begin{array}{l} E = \frac{1}{2}(\alpha\beta\eta\mu B + \delta\gamma\eta\mu\Delta) \\ E = \frac{1}{2}(\delta\alpha\eta\mu A + \beta\gamma\eta\mu\Gamma) \end{array}\right\} 4E \leq \alpha\beta + \delta\gamma + \delta\alpha + \beta\gamma \Leftrightarrow 4(\alpha + \gamma)\varrho \leq (\beta + \delta)(\alpha + \gamma)$$
$$\Leftrightarrow 4\varrho \leq \beta + \delta \Leftrightarrow 4\varrho \leq \alpha + \gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Από την (1) έχουμε } 2(\alpha + \gamma)\varrho \leq A\Gamma\cdot B\Delta \\ 4\varrho \leq \alpha + \gamma \end{array}\right\} \text{ άρα } 8\varrho^2 \leq A\Gamma\cdot B\Delta$$

Όμως $A\Gamma + B\Delta \geq 2\sqrt{A\Gamma\cdot B\Delta} \geq 2\sqrt{8\varrho^2} = 4\sqrt{2}\varrho$. Τελικά $A\Gamma + B\Delta \geq 2\sqrt{2}\varrho$.

B34. Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - (3\sqrt{3}+1)x^3 + 3(\sqrt{3}-1)x^2 + (3+\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

Α. Συγκελάκης

Λύση έστειλε ο Συγκελάκης Α.

Λύση :

Προφανής ρίζα η x = 1. Από το σχήμα του Horner, βρίσκουμε:

$$x^4 - (3\sqrt{3}+1)\cdot x^3 + 3(\sqrt{3}-1)x^2 + (3+\sqrt{3})x - \sqrt{3} = (x-1)(x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3})$$

και η εξίσωση γράφεται: $x - 1 = 0$ ή $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$.

Για την επίλυση της τελευταίας εξίσωσης, βλ. Β18.

B35. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 22, 19, 16, 13, ... Να βρεθούν διαδοχικοί k όροι της αριθμητικής προόδου που να έχουν άθροισμα - 114.

Α. Συγκελάκης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Έστω $\alpha_{\varrho+1}, \alpha_{\varrho+2}, \ldots, \alpha_{\varrho+\varkappa}$ οι ζητούμενοι όροι με άθροισμα Σ = - 114.

Είναι $\Sigma_\varkappa - \Sigma_\varrho = -114 \Leftrightarrow \frac{\varkappa}{2}\left[2\cdot 22 + (\varkappa-1)\cdot 3\right] - \frac{\varrho}{2}\left[2\cdot 22 + (\varrho - 1)3\right] = -114 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varkappa(41 + 3\varkappa) - \varrho(41 + 3\varrho) = -228 \Leftrightarrow 3\varkappa^2 - 3\varrho^2 + 41\varkappa - 41\varrho = -228$

$\Leftrightarrow (\varkappa - \varrho)\left[3(\varkappa+\varrho) + 41\right] = -228$ απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\varkappa - \varrho < 0$ και $\left[3(\varkappa+\varrho) + 41\right] \mid 228$.

Οι διαιρέτες του $228 = 2^2\cdot 3\cdot 19$ που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 41 είναι οι αριθμοί 57, 76, 114, 228. Όμως $3(\varkappa+\varrho) + 41 = 57 \Leftrightarrow 3(\varkappa+\varrho) = 16$ άτοπο αφού $3 \mid 16$. Με τον ίδιο τρόπο απορρίπτονται οι 76, 114, 228. Έτσι, δεν υπάρχουν οι ζητούμενοι διαδοχικοί αριθμοί.

B36. i) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi 15^\circ = 4.$$

ii) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} = 15^\circ$, $\upsilon_\alpha = \frac{\alpha}{4}$. Δείξτε ότι:

α) $\widehat{\Gamma} < 90^\circ$ β) $\widehat{A} = 90^\circ$

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\eta\mu 15^\circ} = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x\cdot\eta\mu 15^\circ + \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu 15^\circ} = 4 \Leftrightarrow$$

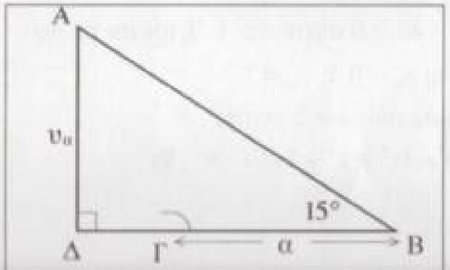
$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(15^\circ - x\right) = 4\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu 15^\circ \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(15^\circ - x) = 2\eta\mu(15^\circ + x) + 2\eta\mu(15^\circ - x)$ (1)

Θέτοντας $\omega = 15^\circ - x$ είναι $15^\circ + x = 30^\circ - \omega$ και:

(1) $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 2\eta\mu(30^\circ - \omega) + 2\eta\mu\omega \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 2\eta\mu 30^\circ\sigma\upsilon\nu\omega - 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu 30^\circ + 2\eta\mu\omega \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu\omega\left(1 - \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 180^\circ\varkappa$.

Έτσι $15^\circ - x = 180^\circ\varkappa \Leftrightarrow x = 180^\circ\cdot\lambda + 15^\circ$, $\lambda\in Z$



ii) α) Αν $\widehat{\Gamma} \geq 90^\circ$ τότε $B\Delta = \alpha + \Gamma\Delta$ και

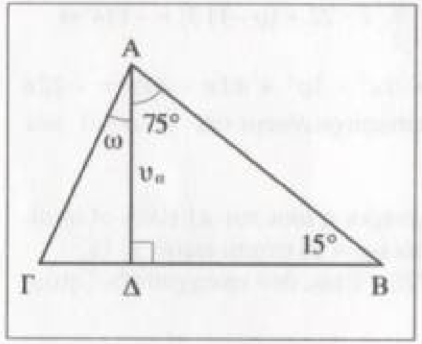
$$\varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\frac{\alpha}{4}}{\alpha + \Gamma\Delta} \leq \frac{\frac{\alpha}{4}}{\alpha} = \frac{1}{4} \text{ δηλ.}$$

$$\varepsilon\varphi 15^\circ \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 15^\circ \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$1+εφ^2 15^o \le \frac{17}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{συν^2 15^o} \le \frac{17}{16} \Leftrightarrow συν^2 15^o \ge \frac{16}{17} \Leftrightarrow \frac{1+συν30^o}{2} \ge \frac{16}{17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν^2 15^o \ge \frac{16}{17} \Leftrightarrow \frac{1+συν30^o}{2} \ge \frac{16}{17}$$ απ' όπου $συν30^o \ge \frac{15}{17} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \ge \frac{15}{17}$ ... άτοπο.

Ώστε $\hat{Γ} < 90^o$



β) Από το $\overset{\triangle}{ΓΑΔ}$: $εφω = \frac{ΓΔ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΓΔ = υ_α \cdot εφω$,

ενώ από το $\overset{\triangle}{ΒΑΔ}$: $ΒΔ = υ_α \cdot εφ75^o$.

Όμως $ΒΔ+ΓΔ = α \Leftrightarrow υ_α\left(εφω+εφ75^o\right) = α \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{α}{4}\left(εφω + σφ15^o\right) = α \Leftrightarrow εφω + σφ15^o = 4$

και από το (i) συμπεραίνουμε ότι $ω = 15^o$ οπότε $\hat{A} = 90^o$.

Β37. Αν τα πολυώνυμα
$f(x) = 3x^5+2x^4+cx^3+2cx^2 - 11x+c - 2$,
$g(x)=3x^5+x^4+cx^3+(c+1)x^2+(c - 11)x+c - 2$,
$c > 1$ έχουν μία κοινή ρίζα, δείξτε ότι έχουν και δεύτερη κοινή ρίζα.

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Συγκελάκης Α.

Λύση :

Έστω ότι τα f(x), g(x) έχουν κοινή ρίζα x_o. Τότε:

$$3x_o^5+2x_o^4+c\cdot x_o^3+2c\cdot x_o^2 - 11x_o+c - 2=0 \quad (1) \quad και$$
$$3x_o^5+x_o^4+c\cdot x_o^3+(c+1)\cdot x_o^2+(c-11)x_o+c - 2=0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις (1), (2) βρίσκουμε:

$$x_o^4 + (c - 1)\cdot x_o^2 - c\cdot x_o = 0 \Leftrightarrow x_o = 0 \ \text{ή}\ x_o^3 + (c - 1)x_o - c = 0 \quad (3)$$

Μία ρίζα της (3) είναι η x = 1. Έτσι:

$$x_o^3 + (c - 1)x_o - c = 0 \Leftrightarrow (x_o - 1)(x_o^2 + x_o + c) = 0 \Leftrightarrow x_o = 1$$

αφού για το τριώνυμο $x^2 + x + c$ είναι $Δ = 1 - 4c < 0$ αφού $c > 1$. Έτσι αν τα πολυώνυμα f(x), g(x) έχουν κοινή ρίζα x_o, θα είναι $x_o = 0$ ή $x_o = 1$.

- Αν $x_o = 0$, από τις σχέσεις f(0) = g(0) = 0 βρίσκουμε c = 2 οπότε
$f(x) = 3x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 11x$, $g(x) = 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 9x$
που έχουν δεύτερη κοινή ρίζα, την x = 1.

- Αν $x_o = 1$ από f(1) = g(1) = 0, βρίσκουμε c = 2 και τα f(x), g(x) έχουν δεύτερη κοινή ρίζα, την x = 0.

Β38. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2. Από το Α φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Οι κάθετες στις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα τέμνουν την (ε) στα Κ, Λ και οι ΒΛ, ΚΓ τέμνονται στο Ο.

α) Υπολογίστε το εμβαδό (ΚΟΛ).

β) Υπολογίστε το μήκος ΑΟ.

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση 1η:

α) Έστω $(ΚΟΛ)=ε_1$, $(ΚΟΒ) = (ΛΟΓ)= ε_2$, $(ΒΟΓ) = ε_3$.

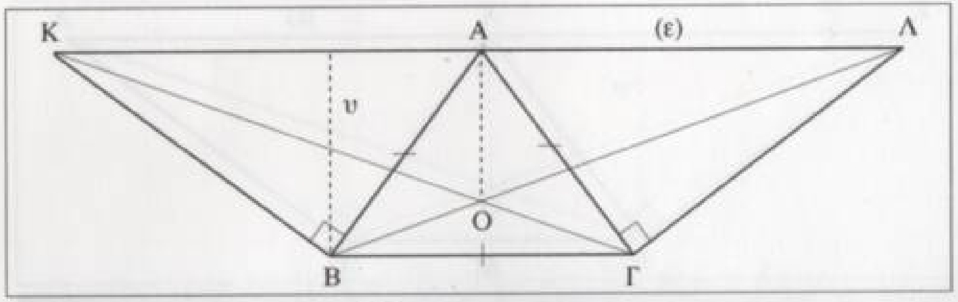
Από το $\overset{\triangle}{ΑΓΛ}$ είναι $\widehat{ΓΑΛ} = 60^o \Rightarrow$

$\hat{Λ} = 30^o$ οπότε $ΑΛ = 2 \cdot ΑΓ = 4$

και $ΓΛ = 2\sqrt{3}$ από Πυθαγόρειο θεώρημα.

Ακόμη $(ΑΒΓ) = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ συνεπώς

$$(ΒΓΛΚ) = \sqrt{3} + 2\left(ΑΓΛ\right) = \sqrt{3} + 2\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$



Έχουμε λοιπόν $ε_1+ε_2+2ε_3 = 5\sqrt{3}$. (1)

Όμως $ε_2+ε_3=(ΒΓΛ)=(ΑΒΓ)=\sqrt{3}$, αφού ΑΛ // ΒΓ.

Έτσι (1) $\Leftrightarrow ε_1+ε_3 = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow ε_3 = 4\sqrt{3} - ε_1$ (2)

και $\quad ε_2 = \sqrt{3} - ε_3 = \sqrt{3} - \left(4\sqrt{3} - ε_1\right)$.

Τελικά $\quad ε_2 = ε_1 - 3\sqrt{3}$ (3)

Στο τραπέζιο ΚΛΓΒ είναι γνωστό ότι ισχύει: $ε_1 \cdot ε_2 = ε_3^2$ που λόγω των (2), (3) γράφεται

$$ε_1\left(ε_1 - 3\sqrt{3}\right) = \left(4\sqrt{3} - ε_1\right)^2$$

απ' όπου βρίσκουμε τελικά ότι $(ΚΟΛ) = \varepsilon_1 = \frac{16}{5}\sqrt{3}$

β) Είναι $\frac{(ΚΟΛ)}{(ΒΛΚ)} = \frac{ΑΟ}{υ}$ αφού έχουν την ίδια βάση, οπότε $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} = \frac{ΑΟ}{υ}$ και

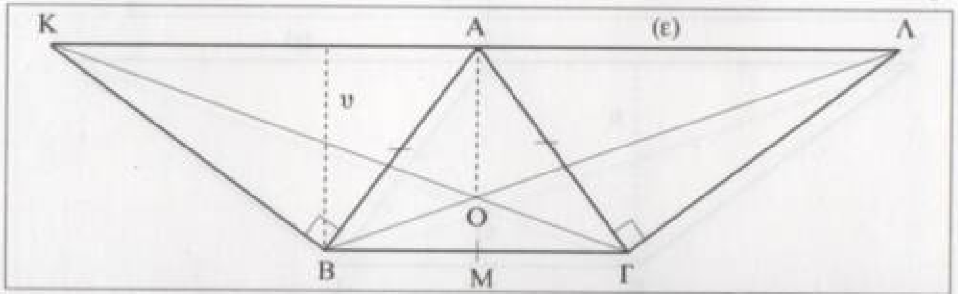
$$ΑΟ = υ \cdot \frac{\frac{16}{5} \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{3}$$

Λύση 2η:

Από τα ορθογώνια τρίγων α ΑΒΚ, ΑΓΛ (με γωνίες 60°) προκύπτει ότι ΑΚ = ΑΛ = 2·2 = 4. Από τα ίδια ίσα τρίγωνα συμπεραίνουμε ότι το τραπέζιο ΒΓΛΚ είναι ισοσκελές, οπότε τα τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΚΛ είναι ισοσκελή.
Έτσι, αν ΑΜ το ύψος του ΑΒΓ, το Ο βρίσκεται επί της ΑΜ. Θέτοντας ΟΑ = x, ΟΜ = y είναι $x + y = ΑΜ = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (1) και

$\frac{ΟΑ}{ΟΜ} = \frac{ΑΛ}{ΒΜ} = \frac{4}{1} = 4$, δηλαδή $\frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = 4y$ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε $y = \frac{\sqrt{3}}{5}$ άρα $x = \frac{4}{5}\sqrt{3}$. Έτσι: $(ΟΚΛ) = \frac{1}{2} ΟΑ \cdot ΚΛ = \frac{16\sqrt{3}}{5}$.



ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Γ' λυκείου

Γ1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα ν φορές ($\nu \in N^*$) και καταγράφουμε τις ενδείξεις.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα P όλες οι ενδείξεις να είναι ίδιες.

β) Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ρίψεων ώστε η ευθεία ε: $y = P \cdot x + 4$ να είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη της

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{(m^2 + 4) \cdot x^2 + 1}.$$

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός., Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Λιάπης, Ε. Μήτσιου, Ν. Κατσάς.

Λύση :

α) Σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων είναι 2^ν.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι δύο, οι: Κ.Κ.Κ...Κ ή Γ.Γ....Γ. Άρα η πιθανότητα είναι $p = \frac{2}{2^\nu} = \frac{1}{2^{\nu-1}}$.

β) Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σ' αυτό. Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αν $y = \lambda x + \mu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη (για $\lambda = 0$ οριζόντια) τότε

$$\lambda = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(m^2+4)x^3} = \frac{1}{m^2+4}$$

(Ενώ εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\mu = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \lambda x) = 0$)

Έτσι $y = \frac{1}{m^2+4} x$ είναι η εξίσωση της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της f. Για να είναι η (ε) παράλληλη προς την ασύμπτωτη πρέπει

$$p = \frac{1}{m^2+4} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{\nu-1}} = \frac{1}{m^2+4} \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = m^2 + 4$$

Είναι $m^2 + 4 \geq 4 \; \forall \, m \in \mathbb{R}$.

Η ελάχιστη τιμή του $m^2 + 4$ (άρα και του $2^{\nu-1}$) είναι η 4 (για $m = 0$) οπότε

$$2^{\nu-1} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow \nu - 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\nu = 3}$$

Γ2. Για τον ν × ν πίνακα Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς ισχύει $A^2 = I$.

Ν. δ. ο. για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$| I + (\eta\mu x) \cdot A | \geq 0$$

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ε. Μήτσιου, Γ. Ι. Τσιτσίνιας.

1η Λύση :

Ονομάζουμε για ευκολία $\eta\mu x = \lambda \Rightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$

Θα προσδιορίσουμε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $I + \lambda A = (\alpha I + \beta A)^2 \Leftrightarrow I + \lambda A = \alpha^2 I + 2\alpha\beta A + \beta^2 A^2$, και επειδή $A^2 = I$ θα έχουμε:

$I + \lambda A = (\alpha^2 + \beta^2) I + 2\alpha\beta A$. Πρέπει και αρκεί να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = \lambda \end{array}\right\} \begin{array}{ll} (+) & (\alpha+\beta)^2 = 1 + \lambda \geq 0 \\ (-) & (\alpha-\beta)^2 = 1 - \lambda \geq 0 \end{array}$$

Αν λοιπόν επιλέγουμε π.χ.

$$\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta = \sqrt{1+\lambda} \\ \text{και} \quad \alpha - \beta = \sqrt{1-\lambda} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda}\right) \\ \beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1-\lambda}\right) \end{array}$$

για τις τιμές των α και β ισχύει:

$$I + (\eta\mu x)A = (\alpha I + \beta A)^2 \Rightarrow | I + (\eta\mu x)A | = | \alpha I + \beta A |^2 \geq 0$$

2η Λύση :

Επειδή

$$I + (\eta\mu x)A = \left(\eta\mu^2 \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}\right) I + 2\eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} A =$$

$$= \eta\mu^2 \frac{x}{2} I + 2\eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} A + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} I =$$

$$= \eta\mu^2 \frac{x}{2} I + 2\eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} A + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} A^2 = \left(\eta\mu \frac{x}{2} I + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} A\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| I + (\eta\mu x)A \right| = \left| \eta\mu \frac{x}{2} I + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} A \right|^2 \geq 0$$

ΣΧΟΛΙΟ

Στην πρώτη λύση βρέθηκε

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\eta\mu x} + \sqrt{1-\eta\mu x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\eta\mu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\eta\mu \frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|\eta\mu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right| + \left|\eta\mu \frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right|\right) = \max\left(\eta\mu \frac{x}{2}, \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right).$$

Αν λοιπόν είναι π.χ. $\max\left(\eta\mu \frac{x}{2}, \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}\right) = \eta\mu \frac{x}{2}$ είναι

$$\alpha = \eta\mu \frac{x}{2} \text{ και } \beta = \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \text{ (ή αντίστροφα)}$$

Γ3. Έστω A πίνακας $\nu \times \nu$ με $A^2 = A + I$. Να δειχθεί ότι:

$$adj\,(adj(A - I)) = |A|^{2-\nu}(A - I)$$

Π. Κουρσουμπάς

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση:

Δίνεται ότι $A^2 = A + I \Leftrightarrow A^2 - A = I \Leftrightarrow A(A - I) = I \Leftrightarrow A^{-1} = A - I$ (1)

και $(A - I)^{-1} = A$ (2)

οπότε $|A - I| = \dfrac{1}{|A|}$ (3)

Έτσι $adj\,(A - I) = |A - I|\,(A - I)^{-1} \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{|A|}A$ οπότε και

$$adj\,(adj\,(A - I)) = adj\left(\frac{1}{|A|}\cdot A\right) = \left|\frac{1}{|A|}A\right|\left(\frac{1}{|A|}A\right)^{-1} = \frac{1}{|A|^{\nu}}|A|\cdot\frac{1}{|A|^{-1}}A^{-1} =$$

$$= |A|^{2-\nu}A^{-1} = |A|^{2-\nu}(A - I)$$

(Είναι γνωστά τα: $|\lambda A| = \lambda^{\nu}|A|$, $adjX = |X|X^{-1}$ και $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$ για αντιστρέψιμους πίνακες X και A αντίστοιχα καθώς και $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$)

Γ4. Έστω A, B αντιστρέψιμοι πίνακες τύπου $\nu \times \nu$ για τους οποίους ισχύει η σχέση $AB^{-1} + A^{-1} = BA^{-1} + B^{-1}$.

Αν ο πίνακας $A + B - I$ είναι αντιστρέψιμος να αποδείξετε ότι

i) $A^{-1} - B^{-1} = O$ ii) $2A \neq I_{\nu}$.

Π. Βασιλειάδης- Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση:

i) Είναι:

$$AB^{-1} + A^{-1} = BA^{-1} + B^{-1} \Leftrightarrow AB^{-1} - B^{-1} = BA^{-1} - A^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^{-1} - B^{-1} + I = BA^{-1} - A^{-1} + I \Leftrightarrow AB^{-1} - B^{-1} + BB^{-1} = BA^{-1} - A^{-1} + AA^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A + B - I)B^{-1} = (A + B - I)A^{-1} \overset{A+B-I\ \text{αντίστρ.}}{\Leftrightarrow} B^{-1} = A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} - B^{-1} = O$$

ii) Αφού $A^{-1} = B^{-1} \Leftrightarrow A = B$.

Τότε εφόσον ο $A + B - I = 2A - I$ είναι αντιστρέψιμος θα είναι

$$2A - I \neq O \Leftrightarrow 2A \neq I$$

Γ5. Έστω οι $\nu \times \nu$ πίνακες A, B, όπου ν περιττός, ώστε

$$A^2 + 2AB + B^2 = O.$$

Να δειχτεί ότι $|AB - BA| \leq 0$.

Γ. Μπαϊλάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης, Ε. Μήτσιου, Ο. Μοσχίδης.

Λύση:

Είναι $A^2 + 2AB + B^2 = O \Rightarrow A^2 + AB + B^2 = - AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = -(AB - BA) \Rightarrow (A + B)^2 = -(AB - BA) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(A + B)^2| = (-1)^{\nu}|AB - BA| \overset{\nu\ \text{περιττός}}{\Rightarrow} |A + B|^2 = -|AB - BA| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -|AB - BA| \geq 0 \Leftrightarrow |AB - BA| \leq 0$$

Γ6. Έστω $p, q, r > 0$ με $2p = q + r$ και $q \neq r$. Δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{p^{q+r}}{q^q \cdot r^r} < 1$$

Δ. Γαλανάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ε. Μήτσιου, Ο. Μοσχίδης.

Λύση 1η:

Είναι γνωστή η ανισότητα Jensen (ειδική περίπτωση. Δείτε άσκηση 13 σελίδα 224 Βιβλίου Ανάλυσης 1ης Δέσμης) ότι:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ, τότε

$$\forall\, x_1, x_2 \in \Delta\ (x_1 \neq x_2) \text{ είναι } f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

ενώ αν στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω $\Rightarrow f(x_1) + f(x_2) < 2f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln x^x = x\ln x$ $x \in (0, +\infty)$

Είναι $f'(x) = \ln x + 1$ και $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ f κυρτή $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(q) + f(r) > 2f\left(\frac{q + r}{2}\right) = 2f(p) \Leftrightarrow q\ln q + r\ln r > 2p\ln p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln q^q + \ln r^r > \ln p^{2p} \Leftrightarrow \ln q^q r^r > \ln p^{q+r} \Leftrightarrow q^q r^r > p^{q+r} \Leftrightarrow \frac{p^{q+r}}{q^q r^r} < 1$$

Λύση 2η:

Η σχέση που δόθηκε γράφεται

$$p^{q+r} < q^q r^r \Leftrightarrow p^{2p} < q^q r^r \Leftrightarrow p^{2p} < q^q (2p - q)^{2p - q} \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +2p) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^x(2p - x)^{2p - x}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = (e^{x\ln x})'(2p - x)^{2p-x} + e^{x\ln x}(e^{(2p - x)\ln(2p - x)})' =$$
$$= e^{x\ln x}(\ln x + 1)(2p - x)^{2p - x} + e^{x\ln x} e^{(2p - x)\ln(2p - x)}[-\ln(2p - x) - 1] =$$
$$= x^x(\ln x + 1)(2p - x)^{2p-x} + x^x(2p - x)^{2p-x}(-1 - \ln(2p - x)) =$$
$$= x^x(2p - x)^{2p-x}[\ln x - \ln(2p - x)] \qquad (1)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln(2p - x) \Leftrightarrow x = 2p - x \Leftrightarrow x = p$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2p - x \Leftrightarrow 2x < 2p \Leftrightarrow x < p$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > p$

x	0	p	2p
f'(x)	-	O	+
f(x)	↘		↗
		ολικό ελάχιστο	

Άρα $\quad f(x) \geq f(p) = p^p(2p - p)^{2p - p} = p^p \cdot p^p = p^{2p}$

Έτσι $\quad x^x(2p - x)^{2p - x} > p^{2p} \;\; \forall x \neq p$ και για $x = q \Rightarrow$

$$q^q(2p - q)^{2p - q} > p^{2p} \Leftrightarrow q^q \cdot r^r > p^{q + r} \Leftrightarrow \frac{p^{q+r}}{q^q r^r} < 1$$

Γ7. Δίνεται ο πίνακας A ν × ν τέτοιος ώστε $A^2 + 3A + 2I = \mathbf{O}$ και ο αντιστρέψιμος ν × ν πίνακας $B = A^2 + A^3$.

Να δειχθεί ότι $B = -4I$

Γ. Σαράφης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Δίνεται ότι $\quad A^2 + 3A + 2I = \mathbf{O} \qquad (1)$

και ότι ο $\quad B = A^3 + A^2$ είναι αντιστρέψιμος.

Η (1) γράφεται $\quad (A + I)(A + 2I) = O \overset{\cdot A^2}{\Rightarrow} (A^3 + A)(A + 2I) = \mathbf{O} \Rightarrow A + 2I = \mathbf{O}$

(αφού ο $A^3 + A$ αντιστρέφεται).

Έτσι $A = -I$ $\quad$ οπότε $\quad B = A^3 + A^2 = (-2I)^3 + (2I)^2 = -8I + 4I = -4I.$

Γ8. Έστω A, B πίνακες τύπου ν × ν τέτοιοι ώστε $AB = \mathbf{O}$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$f(x) = |A^2 + B^2 + 2xA + 2xB + x^2I|$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

ii) $|A^2 + B^2| \geq 0$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

i) Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$g(x) = |A + xI|, \quad t(x) = |B + xI|.$

Είναι $\; g^2(x) = |A + xI|^2 = |(A + xI)^2| =$
$= |A^2 + 2xA + x^2I|,$
$t^2(x) = |B^2 + 2xB + x^2I|$ και

$$g^2(x)\,t^2(x) = |A^2B^2 + 2xA^2B + x^2A^2 + 2xAB^2 + 4x^2AB + 2x^3A + x^2B^2 + 2x^3B + x^4I| =$$
$$= |x^2(A^2 + 2xA + B^2 + 2xB + x^2I)| = (x^2)^\nu |A^2 + B^2 + 2xA + 2xB + x^2I| =$$
$$= x^{2\nu}f(x).$$

Άρα $\;\forall x \in \mathbb{R}^*$ είναι $\; f(x) = \frac{1}{x^{2\nu}} g^2(x)\,t^2(x) \geq 0$

ii) Επειδή η f είναι πολυωνυμική θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, όπότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Όμως $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^*$ δηλ. $\forall x \in U(0, \alpha)$ οπότε και

$$\lim_{x \to 0} f(x) \geq 0 \Rightarrow f(0) = \left|A^2 + B^2\right| \geq 0$$

Γ9. Σημείο A κινείται στον x΄x με ταχύτητα $v(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. Για $t = 0$ sec ο A έχει συντεταγμένες (- 1, 0).

α) Να δειχθεί ότι το A εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.

β) Σημείο B κινείται στον Oy ώστε το εμβαδό του AOB να είναι σταθερό και ίσο με 1/ 2 τετραγ. μονάδες. Να βρεθεί η ταχύτητα του B τη κάθε χρονική στιγμή .

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της διαμέσου OM του τριγώνου AOB όταν το (AB) γίνεται ελάχιστο.

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ε. Μήτσιου.

Λύση :

α) Επειδή η επιτάχυνση $\alpha(t) = v'(t) = -e^{-t} < 0$, το A εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.

β) Επειδή η τετμημένη x(t) του A είναι

$$x(t) = \int_0^t v(u)\,du + x(0) = \int_0^t e^{-u}\,du + x(0) = \left[-e^{-u}\right]_0^t + x(0)$$

και $x(0) = -1$ (αφού για $t = 0$ το A έχει συντεταγμένες (- 1, 0)).

Προκύπτει ότι $\; x(t) = -e^{-t} - [e^o] - 1 = -e^{-t} + 1 - 1 = -e^{-t}$. Άρα $A(-e^{-t}, 0)$

$$\text{Αν } B\big(0,\ y(t)\big) \text{ τοτε } (AOB) = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -e^{-t} & 0 & 1 \\ 0 & y(t) & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{e^{-t}\cdot y(t)}{2} \quad \big(y(t) \geq 0\big)$$

$$\text{Επομένως } \frac{e^{-t}\,y(t)}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y(t) = e^{t} \Rightarrow U_B = y'(t) = e^{t}$$

γ) Το μέσο του AB, το M έχει συντεταγμένες $M\left(-\frac{e^{-t}}{2}, \frac{e^{t}}{2}\right)$ οπότε

$$(OM) = \sqrt{\frac{e^{-2t} + e^{2t}}{4}} = L(t) \quad \text{ενώ} \quad (AB) = \sqrt{e^{-2t} + e^{2t}} = h(t)$$

Βρίσκουμε πότε το (AB) = h(t) παίρνει ελάχιστη τιμή.

Είναι $h'(t) = \dfrac{-e^{-2t} + e^{2t}}{\sqrt{e^{-2t} + e^{2t}}}$. Τότε $h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2t} \geq e^{-2t} \Leftrightarrow t \geq 0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $t = 0$ με ελάχιστη τιμή $h(0) = \sqrt{2}$.

Τότε $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{-e^{-2t} + e^{2t}}{2\sqrt{e^{-2t} + e^{2t}}}$ και $\left(\dfrac{dL}{dt}\right)_{t=0} = 0$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του (OM) είναι 0 μον/ sec .

Γ10. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq 0$, ώστε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60°$. Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το κλάσμα $\dfrac{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}$.

Γ. Μπαϊλάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Λιάπης, Ο. Μοσχίδης, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Αν ονομάσουμε $t = \dfrac{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}$ τότε το μέγιστο του $t > 0$ γίνεται ταυτόχρονα με το μέγιστο του $t^2 = \dfrac{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2} = \dfrac{(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2}{(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2} =$

$$= \frac{|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\frac{1}{2}}{|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\frac{1}{2}} = \frac{|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} \quad \left(\text{αφού συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{1}{2}\right)$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x^2 + |\vec{\beta}|x + |\vec{\beta}|^2}{x^2 - |\vec{\beta}|x + |\vec{\beta}|^2}$

(ουσιαστικά $x = |\vec{\alpha}|$), βρίσκουμε $f'(x) = \dfrac{2|\vec{\beta}|\left(|\vec{\beta}|^2 - x^2\right)}{\left(x^2 - |\vec{\beta}|x + |\vec{\beta}|^2\right)^2}$.

Η $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = |\vec{\beta}|$.

x	0		$\lvert\vec{\beta}\rvert$	
f'(x)		+	0	−
f(x)		↗	$f(\lvert\vec{\beta}\rvert) = 3$ max	↘

Άρα $t^2_{max} = 3 \Rightarrow t_{max} = \sqrt{3}$

Γ11. Έστω A ένας πίνακας τύπου 5 × 5 με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς τέτοιους ώστε να ισχύει $A^2 - 2A - 2I = \mathbf{O}$.

i) Να βρεθεί το γινόμενο $|A-3I|\cdot|A+I|$

ii) Ν.δ.ο. $|A-3I| < 0 < |A+I|$

iii) Ν.δ.ο. δεν είναι δυνατόν όλα τα στοιχεία του πίνακα A να είναι ακέραιοι.

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Γ- Ν. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης

Λύση :

i) Είναι $|A - 3I|\cdot|A + I| = |(A - 3I)(A + I)| =$
$= |A^2 - 2A - 3I| = |A^2 - 2A - 2I - I| = |-I| =$
$= (-1)^5|I| = (-1)^5 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |A - 3I||A + I| = -1$ (1)

ii) Από την (1) προκύπτει ότι οι ορίζουσες $|A - 3I|$ και $|A + I|$ είναι ετερόσημες.

Έχουμε: $A^2 - 2A - 2I = \mathbf{O} \Rightarrow A^2 = 2A + 2I = 2(A + I) \Rightarrow |A^2| = |2(A + I)| \Rightarrow$
$\Rightarrow |A|^2 = 2^5|A + I| \Rightarrow$ (2) $|A + I| > 0$ οπότε $|A - 3I| < 0$ (3)

(Από την $A^2 - 2A - 2I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^2 - 2A = 2I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - 2I\right) = I$ οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $|A| \neq 0$ οπότε $|A|^2 > 0$).

iii) Αν όλα τα στοιχεία του A είναι ακέραιοι, τότε και των $A + I$ και $A - 3I$ τα στοιχεία θα είναι ακέραιοι· οπότε $|A - 3I|$, $|A + I|$ ακέραιοι. Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $|A - 3I| = -1$ και $|A + I| = 1$.

Όμως $A^2 = 2(A + I) \Rightarrow |A|^2 = |2(A + I)| = 2^5|A + I| = 2^5\cdot 1 = 2^5 \Rightarrow |A| = \pm\sqrt{2^5} \notin \mathbb{Z}$.

Άτοπο. Άρα δεν είναι δυνατόν όλα τα στοιχεία του A να είναι ακέραιοι.

Γ12. Δίνεται ο πίνακας Α ν × ν. Αν ισχύει $A^2 = A + \lambda I$, $\lambda \in R^*$.

α) Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα Ι - Α.

β) Να λυθεί η εξίσωση $AX + A = X$.

Γ. Σαράφης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

α) Αφού (1) $A^2 = A + \lambda \cdot I \Leftrightarrow A^2 - A = \lambda I \Leftrightarrow$
$A - A^2 = -\lambda I \Leftrightarrow A(I - A) = -\lambda I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{\lambda} A(I - A) = I$. Έτσι ο Ι- Α είναι αντιστρέψιμος με $(I - A)^{-1} = -\dfrac{1}{\lambda} A$ (2) $(\lambda \neq 0)$.

β) Η εξίσωση $AX + A = X \Leftrightarrow X - AX = A \Leftrightarrow X(I - A) = A \Leftrightarrow X = A(I - A)^{-1} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow X = A\left(-\frac{1}{\lambda} A\right) = -\frac{1}{\lambda} A^2 \text{ και λόγω της (1) } X = -\frac{1}{\lambda}(A + \lambda I) = -\frac{1}{\lambda} A - I.$$

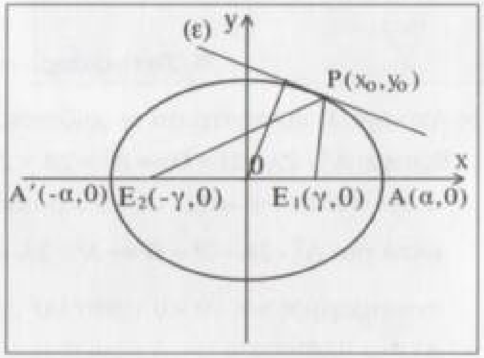
Γ13. Έστω P σημείο έλλειψης με εστίες E_1 και E_2 και έστω $d = d(O, \varepsilon)$ όπου ε η εφαπτομένη της έλλειψης στο P. Δείξτε ότι: $(PE_1) \cdot (PE_2) \cdot d^2 =$ σταθερό, καθώς το P κινείται στην έλλειψη.

Δ. Γαλανάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν. Ιωσηφίδης, Γ. Τσιτσίνιας, Σ. Σκοτίδας.

Λύση :

Αν ονομάσουμε $r_1 = (PE_1)$ και $r_2 = (PE_2)$ θα έχουμε:



$r_1^2 = (x_o - \gamma)^2 + y_o^2$, $r_2^2 = (x_o - \gamma)^2 + y_o^2 \Rightarrow$

$r_2^2 - r_1^2 = 4\gamma x_o \Leftrightarrow (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 4\gamma x_o$

και επειδή $r_2 + r_1 = 2\alpha$ από την τελευταία έχουμε:

$$r_2 - r_1 = \frac{2\gamma}{\alpha} x_o$$

* Ώστε $\begin{cases} r_2 + r_1 = 2\alpha & \text{και} \\ r_2 - r_1 = \dfrac{2\gamma}{\alpha} x_o & (= 2\varepsilon x_o) \end{cases}$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των δύο τελευταίων βρίσκουμε:

$r_2 = \alpha + \dfrac{\gamma}{\alpha} x_o$ $(= \alpha + \varepsilon x_o)$ και $r_1 = \alpha - \dfrac{\gamma}{\alpha} x_o$ $(= \alpha - \varepsilon x_o)$ όπου ε η εκκεντρότητα της

έλλειψης. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο P είναι η

$$\frac{x x_o}{\alpha^2} + \frac{y y_o}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x_o x + \alpha^2 y_o y - \alpha^2 \beta^2 = 0$$

οπότε $$d = d(O, \varepsilon) = \frac{\left|-\alpha^2\beta^2\right|}{\sqrt{\beta^4 x_o^2 + \alpha^4 y_o^2}} = \frac{\alpha^2\beta^2}{\sqrt{\beta^4 x_o^2 + \alpha^4 y_o^2}}.$$

Άρα $$(PE_1)(PE_2)d^2 = r_1 r_2 d^2 = \left(\alpha^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x_o^2\right)\frac{\alpha^4\beta^4}{\beta^4 x_o^2 + \alpha^4 y_o^2} =$$

$$= \frac{\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^4\beta^4}{\beta^4 x_o^2 + \alpha^4 y_o^2} = \frac{\alpha^2\beta^4(\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2)}{\beta^4 x_o^2 + \alpha^4 y_o^2} \overset{**}{=} \frac{\alpha^2\beta^4(\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2)}{\beta^4 x_o^2 + \alpha^4\left[\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x_o^2)\right]} =$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^4(\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2)}{\beta^4 x_o^2 + \alpha^2(\alpha^2\beta^2 - \beta^2 x_o^2)} = \frac{\alpha^2\beta^4(\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2)}{\beta^4 x_o^2 + \alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^2 x_o^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^4(\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2)}{\beta^2\left[\beta^2 x_o^2 + \alpha^4 - \alpha^2 x_o^2\right]} = \alpha^2\beta^2\frac{\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2}{\alpha^4 - (\alpha^2 - \beta^2)x_o^2} =$$

$$= \alpha^2\beta^2\frac{\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2}{\alpha^4 - \gamma^2 x_o^2} = \alpha^2\beta^2 = \text{σταθερό}$$

ΣΧΟΛΙΑ

* Οι χρήσιμες αυτές σχέσεις υπήρχαν στο προηγούμενο βιβλίο Αναλυτικής Γεωμετρίας της Α΄ ΔΕΣΜΗΣ (Βαρουχάκη κ.λ.π.)

** Επειδή $\dfrac{x_o^2}{\alpha^2} + \dfrac{y_o^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow y_o^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x_o^2)$

Γ14. Σ' έναν περιστερώνα υπάρχουν 4ν αρσενικά και $\nu^2 + 2\nu + 4$ θηλυκά ταχυδρομικά περιστέρια. Επιλέγουμε στην τύχη ένα περιστέρι. Να βρείτε πόσα αρσενικά και πόσα θηλυκά περιστέρια υπάρχουν στον περιστερώνα έτσι ώστε η πιθανότητα το περιστέρι που επιλέξαμε να είναι αρσενικό να είναι μέγιστη. Ποια είναι αυτή η πιθανότητα;

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Όλα τα περιστέρια είναι συνολικά $4\nu + \nu^2 + 2\nu + 4 = \nu^2 + 6\nu + 4$ οπότε αν Ω ο δειγματικός χώρος θα είναι $N(\Omega) = \nu^2 + 6\nu + 4$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου

A : « Το περιστέρι που επιλέξαμε είναι αρσενικό» είναι $P = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4\nu}{\nu^2 + 6\nu + 4}$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 6x + 4}$

ζητούμε για ποιο θετικό και ακέραιο x η f παίρνει μέγιστη τιμή.

Βρίσκουμε ότι $f'(x) = 4\frac{4 - x^2}{\left(x^2 + 6x + 4\right)^2}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	0	2	+∞
f'(x)	+	O	-
f(x)	↗		↘

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: η μέγιστη τιμή της f γίνεται για x = 2 και είναι

$$f(2) = P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η συνάρτηση $P(\nu) = \frac{4\nu}{\nu^2 + 6\nu + 4}$ (ακολουθία) έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$

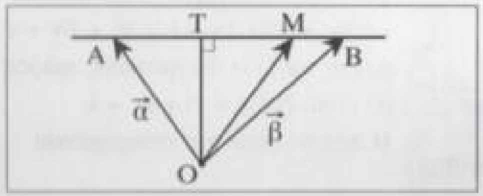
Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 6x + 4}$ είναι μια **επέκταση** της προηγούμενης στο $(0, +\infty)$

Γ15. Έστω τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Να δειχτεί ότι:

$$\left|x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}\right| \geq \frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Γ. Μπαϊλάκης



Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Γ.Ι. Τσιτσίνιας.

Λύση:

Πρώτα - πρώτα, αν

$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

τότε η παράσταση: $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right|$

παραπέμπει στο (διπλάσιο) εμβαδόν του τριγώνου $O\hat{A}B$.

Επίσης $\forall x \in \mathbb{R}$ το

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - x\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = x\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$

M σημείο της ευθείας AB.

Τώρα η αποδεικτέα: $\left|x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}\right| \geq \frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| \geq \frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right| \geq 2E\left(O\hat{A}B\right)$$

Αν $OT \perp AB$ είναι $\left|\overrightarrow{OM}\right| \geq \left|\overrightarrow{OT}\right|$ οπότε: $\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right| \geq \left|\overrightarrow{OT}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right| = 2E\left(O\hat{A}B\right)$

Έτσι $\quad \left|x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}\right|\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| \geq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right|$

οπότε $\quad \left|x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}\right| \geq \frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}\left|\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)\right|$

Το = ισχύει αν και μόνο αν $\overrightarrow{OT} \equiv \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta} \perp \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Είναι φανερό ότι η αποδεικτέα ισχύει και όταν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 0$ ή π, αφού το πρώτο μέλος θετικό ή μηδέν και το δεύτερο είναι μηδέν.

Γ16. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{w}, \vec{v}$ και ο μιγαδικός

$$z = \left|\vec{w} + \vec{v}\right| + i\left|\vec{w} - \vec{v}\right|$$

α) Να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα του z.

β) Αν $\left(\widehat{\vec{w}, \vec{v}}\right) = \theta$, με $\theta \in (0, \pi)$, τότε να γραφτεί ο z σε τριγωνομετρική μορφή και ν.δ.ο.
$2^{-2\nu} \cdot z^{2\nu} + 2^{2\nu} \cdot z^{-2\nu} = 2\sigma\upsilon\nu(\nu \cdot \theta)$

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Γ - Ν Ιωσηφίδης .

Λύση :

α) Αν $z = x + yi$ επειδή

$\left|\vec{w} + \vec{v}\right|^2 = \vec{w}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{w}\vec{v} = 2 + 2\vec{w}\vec{v}$

και $\left|\vec{w} - \vec{v}\right|^2 = \vec{w}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{w}\vec{v} = 2 - 2\vec{w}\vec{v}$,

θα έχουμε:

$$\left|\vec{w} + \vec{v}\right|^2 = \sqrt{2 + 2\vec{w}\vec{v}} \text{ και } \left|\vec{w} - \vec{v}\right|^2 = \sqrt{2 - 2\vec{w}\vec{v}}$$

Έτσι $x = \sqrt{2 + 2\vec{w}\vec{v}}$ και $y = \sqrt{2 - 2\vec{w}\vec{v}} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad x \geq 0$ και $y \geq 0$

Άρα η ζητούμενη γραμμή είναι το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

β) Αν $\left(\widehat{\vec{w}, \vec{v}}\right) = \theta \Rightarrow \vec{w}\,\vec{v} = 1 \cdot 1\, συν\theta \Rightarrow$

$$z = \sqrt{2 + 2συν\theta} + i\sqrt{2 - 2συν\theta} = \sqrt{2(1 + συν\theta)} + i\sqrt{2(1 - συν\theta)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2\, συν^2\frac{\theta}{2}} + i\sqrt{2 \cdot 2\, ημ^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|συν\frac{\theta}{2}\right| + 2i\left|ημ\frac{\theta}{2}\right| =$$

$$= 2\left(συν\frac{\theta}{2} + i\,ημ\frac{\theta}{2}\right) \text{ αφού } \theta \in (0, \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Ώστε $z = 2\left(συν\frac{\theta}{2} + i\,ημ\frac{\theta}{2}\right)$. Άρα:

$$2^{-2\nu} \cdot z^{2\nu} + 2^{2\nu} \cdot z^{-2\nu} = 2^{-2\nu} \cdot 2^{2\nu}\left(συν\frac{2\nu\theta}{2} + i\,ημ\frac{2\nu\theta}{2}\right) + 2^{2\nu} \cdot 2^{-2\nu}\left(συν\frac{-2\nu\theta}{2} + i\,ημ\frac{-2\nu\theta}{2}\right) =$$

$$= συν(\nu\theta) + i\,ημ(\nu\theta) + συν(\nu\theta) - i\,ημ(\nu\theta) = 2συν(\nu\theta)$$

Γ17. Αν A είναι ένας $\nu \times \nu$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^3 = \mathbf{O}$ N.δ.ο. ο πίνακας $B = I + xA + yA^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ο. Μοσχίδης.

1η Λύση :

Παρατηρούμε ότι:

$(I + xA)(I + yA^2) = I^2 + yA^2 + xA + xyA^3 = I + xA + yA^2$ δηλ.

$$B = (I + xA)(I + yA^2) \quad (1) \quad \text{αφού } A^3 = \mathbf{O}$$

Είναι $(I + xA)(I - xA + x^2A^2) = I^3 + x^3A^3 = I$ άρα ο $I + xA$ αντιστρέψιμος.

Επίσης $(I + yA^2)(I - yA^2) = I - y^2A^4 = I$ αφού $A^4 = A^3A = \mathbf{O}$.

Άρα και ο $I + yA^2$ είναι αντιστρέψιμος με $B^{-1} = (I + yA^2)^{-1}(I + xA)^{-1}$.

2η Λύση :

Είναι $B - I = xA + yA^2 = (xI + yA)A = A(xI + yA)$ οπότε

$$(B - I)^3 = [(xI + yA)A]^3 \overset{*}{=} (xI + yA)^3 A^3 \overset{**}{=} \mathbf{O} \Rightarrow B^3 - 3B^2 + 3B - I = \mathbf{O} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^3 - 3B^2 + 3B = I \Rightarrow B(B^2 - 3B + 3I) = I \Rightarrow B^{-1} = B^2 - 3B + 3I.$$

* Είναι γνωστό ότι: $AB = BA \Rightarrow (AB)^\nu = A^\nu B^\nu \;\; \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ (Απόδ. με επαγωγή)

π.χ. για $\nu = 3$ είναι $(AB)^3 = AB \cdot AB \cdot AB = AAB \cdot BAB = AAAABB =$

$$= AAABBB = A^3B^3$$

** Επίσης για κάθε πίνακα A $\nu \times \nu$ και για τον αντίστοιχο τύπο μοναδιαίο I ισχύει: $(xA \pm yI)^2 = x^2A^2 \pm 2xyAI + y^2I^2$ κ.λ.π.

$$(xA \pm yI)^3 = x^3A^3 \pm x^2yA^2I + 3xy^2AI^2 \pm y^3I^3 \text{ κ.λ.π.}$$

Γ18. Αν A είναι $\mu \times \mu$ πίνακας για τον οποίο ισχύει $A^2 - A + I = \mathbf{O}$, να βρεθεί ο A^ν, όπου ν η λύση της εξίσωσης

$$\Delta^\nu_{1996} = P_{1996} \cdot \binom{\nu}{1995}$$

Γ. Σαράφης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν.Λιάπης.

Λύση :

Η εξίσωση: $\Delta^\nu_{1996} = P_{1996} \cdot \binom{\nu}{1995} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu!}{(\nu - 1996)!} = 1995!\,\frac{\nu!}{1995!\,(\nu - 1995)!} \Leftrightarrow (\nu - 1996)! = (\nu - 1995)! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\nu - 1996)! = (\nu - 1996)!\,(\nu - 1995) \Leftrightarrow \nu - 1995 = 1 \Leftrightarrow \nu = 1996$$

Τώρα η $A^2 - A + I = \mathbf{O} \Rightarrow A^2 - A = -I$ και $A^3 - A^2 = -A \Leftrightarrow A^3 = A^2 - A = -I$

έτσι $A^\nu = A^{1996} = A^{3 \cdot 665 + 1} = A^{3 \cdot 665} \cdot A^1 = (A^3)^{665} \cdot A = (-I)^{665}A = -A$

Γ19. Για τον $\nu \times \nu$ πίνακα A ισχύει

$$A^3 = 9I$$

α) Δείξτε ότι ο πίνακας $A - 2I$ αντιστρέφεται και να βρείτε τον αντίστροφό του.

β) Λύστε την εξίσωση $AX - 3A = 2X - I$

Γ. Σαράφης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης , Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

α) Ονομάζουμε

$A - 2I = B \Leftrightarrow A = B + 2I$. Αφού $A^3 = 9I \Rightarrow (B + 2I)^3 = 9I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B^3 + 6B^2 + 12B + 8I = 9I \Leftrightarrow B^3 + 6B^2 + 12B = I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(B^2 + 6B + 12I) = I.$$

Άρα $B^{-1} = B^2 + 6B + 12I = (A - 2I)^2 + 6(A - 2I) + 12I \Rightarrow$

$$B^{-1} = (A - 2I)^{-1} = A^2 + 2A + 4I$$

2ος τρόπος

Αφού $A^3 = 9I \Leftrightarrow A^3 - 8I = I \Leftrightarrow A^3 - (2I)^3 = I \Leftrightarrow (A - 2I)(A^2 + A(2I) + (2I)^2) = I \Rightarrow$

$$(A - 2I)^{-1} = A^2 + 2A + 4I$$

β) Η εξίσωση γράφεται: $AX - 2X = 3A - I \Leftrightarrow (A - 2I)X = 3A - I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X = (A - 2I)^{-1}(3A - I) =$$
$$= (A^2 + 2A + 4I)(3A - I) = \ldots =$$
$$= 5A^2 + 10A + 23I$$

Γ20. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \text{ και } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έστω Ω το σύνολο των τιμών του λ για τις οποίες $\vec{w} \parallel \vec{v}$.

Αν το Ω αποτελεί το δ. χώρο ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα τότε:

α) Να βρεθεί η πιθανότητα το

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + \mu x + \mu^2 - 3}{x - 1} \in \mathbb{R}, \text{ αν } \mu \in \Omega.$$

β) Να βρεθεί η πιθανότητα η συνάρτηση

$$\text{με } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1) - \alpha x}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ x^2 + \alpha^2 - \alpha, & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$$

$\alpha \in \Omega$, να είναι συνεχής στο x = 0.

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Καζαντζής, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Είναι $\vec{w} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0.$

Έτσι $\Omega = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow N(\Omega) = 3$

α) Ας είναι Α το ενδεχόμενο:

« $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + \mu x + \mu^2 - 3}{x - 1} \in \mathbb{R}$, αν $\mu \in \Omega$»

Αν $\dfrac{x^2 + \mu x + \mu^2 - 3}{x - 1} = f(x) \Rightarrow$

$$x^2 + \mu x + \mu^2 - 3 = (x - 1) f(x)$$

και αφού θέλω $\lim_{x \to 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to 1}(x^2 + \mu x + \mu^2 - 3) = \lim_{x \to 1}(x - 1) \lim_{x \to 1} f(x) =$

$$= 0 \cdot \ell = 0 \Rightarrow 1 + \mu + \mu^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 + \mu - 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -2.$$

Αφού $\mu \in \Omega \Rightarrow \mu = 1$. Έτσι N(A) = 1 ενώ $N(\Omega) = 3 \Rightarrow P(A) = \dfrac{1}{3}$

β) Ας είναι τώρα Α το ενδεχόμενο: « Η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$ με $\alpha \in \Omega$»

Είναι $\lim_{x \to 0^-}(x^2 + \alpha^2 - \alpha) = \alpha^2 - \alpha = f(0)$

ενώ $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1 + x) - \alpha x}{x} = \lim_{x \to 0^+}\left[\dfrac{\ln(1 + x)}{x} - \alpha\right] \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^+}\left(\dfrac{1}{1 + x} - \alpha\right) = 1 - \alpha$

Πρέπει $\alpha^2 - \alpha = 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1 \Rightarrow N(A) = \{-1, 1\} \Rightarrow P(B) = \dfrac{2}{3}$

Γ21. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ώστε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}|}{x + 1} = 1$$

Να δειχτεί ότι:

i) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1$ ii) $\vec{\alpha}\vec{\beta} \ge -\dfrac{1}{4}$

Γ. Μπαϊλάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ- Ν Ιωσηφίδης, Γ. Ι. Τσιτσίνιας.

Λύση:

i) Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$

με $f(x) = \dfrac{|x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}|}{x + 1}$

γνωρίζουμε ότι: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f^2(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \dfrac{|x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}|^2}{(x + 1)^2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{[x\vec{\alpha} + (1 - x)\vec{\beta}]^2}{x^2 + 2x + 1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\vec{\alpha}^2 + (1 - x)^2\vec{\beta}^2 + 2x(1 - x)\vec{\alpha}\vec{\beta}}{x^2 + 2x + 1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{(\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta})x^2 + 2x(\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}) + \vec{\beta}^2}{x^2 + 2x + 1} \overset{\text{ρητή}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta})x^2}{x^2} =$$

$$= \vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 1 \Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1 \quad (1)$$

ii) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \ge -\left(\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}\right)^2$ (2)

Πράγματι η (2) $\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 \ge 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \ge 0 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 \ge 0$

Η (2) γράφεται: $\vec{\alpha}\vec{\beta} \ge -\dfrac{|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2}{4} = -\dfrac{1}{4}$ (λόγω της 1). Έτσι $\vec{\alpha}\vec{\beta} \ge -\dfrac{1}{4}$

Γ22. Να λυθεί στο C η εξίσωση

$$z^4 - 4\bar{z} + 3 = 0, \text{ αν } |z| = 1$$

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ο. Μοσχίδης .

Λύση :

Επειδή $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ (1)

Τότε η εξίσωση (2) $z^4 - 4\bar{z} + 3 = 0 \Leftrightarrow z^4 - 4\frac{1}{z} + 3 = 0 \Leftrightarrow z^5 + 3z - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^5 - 1 + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+4) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ (που επαληθεύει και την $|z| = 1$) ή

$$z^4+z^3+z^2+z+4 = 0 \quad (3)$$

Η (3) γράφεται: $z^4+z^3+z^2+z = -4 \Leftrightarrow z^3(z+1) + z(z+1) = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(z+1)(z^2+1) = -4 \Rightarrow |z(z+1)(z^2+1)| = |-4| = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z||z+1||z^2+1| = 4$ (4)

Όμως $|z| = 1$, $|z+1| \le |z| + 1 = 1 + 1 = 2$, $|z^2+1| \le |z|^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

οπότε η (4) ισχύει αν ισχύουν ταυτόχρονα

$$|z| = 1 \text{ και } |z+1| = |z| + 1 \text{ και } |z^2+1| = |z|^2 + 1$$

Η $|z+1| = |z| + 1 \Leftrightarrow |z+1|^2 = (|z|+1)^2 \Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}+1) = |z|^2 + 2|z| + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = |z|^2 + 2|z| + 1 \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} + 1 = |z|^2 + 2|z| + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2Re(z) = 2|z| \Leftrightarrow Re(z) = |z|$

Αν λοιπόν $z = \alpha + \beta i$, η τελευταία γίνεται:

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow \alpha \ge 0 \text{ και } \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha \ge 0 \text{ και } \beta = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = \alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$ αφού $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \alpha \ne 0$). Τότε $|z| = |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Η τιμή αυτή του $z = 1$ δεν επαληθεύει την (3). Άρα η μόνη ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι η $z = 1$.

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή η (2) $\Leftrightarrow z^5 + 3z = 4$ και $|z^5 + 3z| = 4$ ενώ και

$$|z^5| + |3z| = |z|^5 + 3|z| = 1 + 3 = 4 \Rightarrow |z^5 + 3z| = |z^5| + |3z|$$

και είναι Α η εικόνα του z^5 και Β η εικόνα του 3z, η προηγούμενη οδηγεί

στην $|\vec{OA}| + |\vec{OB}| \Rightarrow \vec{OA} \uparrow\uparrow \vec{OB}$ κ.λ.π.

Γ23. Μεταξύ 10 βιβλίων υπάρχουν μερικά κακέκτυπα. Επιλέγουμε στην τύχη δύο βιβλία. Αν η πιθανότητα κανένα απ' αυτά να μην είναι κακέκτυπο είναι ίση με $\frac{7}{15}$ να βρείτε πόσα είναι τα κακέκτυπα βιβλία.

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ.Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Θ. Καζαντζής, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Αν είναι ν τα «καλά» (μη κακέκτυπα) βιβλία και 10 - ν τα κακέκτυπα, η πιθανότητα και τα δύο επιλεγμένα βιβλία να είναι «καλά» είναι:

$$P = \frac{\binom{\nu}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\nu(\nu-1)}{10 \cdot 9}. \text{ Πρέπει } P = \frac{7}{15} \Rightarrow \frac{\nu(\nu-1)}{10 \cdot 9} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \nu(\nu-1) = 7 \cdot 6 \Rightarrow \nu = 7.$$

Άρα τα κακέκτυπα είναι $10 - \nu = 3$

ΣΧΟΛΙΟ

Η $\nu(\nu-1) = 7 \cdot 6$ οδηγεί στο $\nu = 7$ και από την επίλυση της προκύπτουσας εξίσωσης αλλά και από το γεγονός ότι ν - 1, ν διαδοχικοί φυσικοί και 6, 7 ομοίως διαδοχικοί φυσικοί.

Γ24. Έστω οι μιγαδικοί

$z = \frac{\mu}{\alpha} + \frac{\nu}{\beta}i$, $w = \frac{\beta}{\alpha^2}k + \frac{\lambda}{\alpha}i$ με $\mu, \nu \in \mathbb{R}^*$, $\alpha > \beta > 0$. Αν $|z| = |w| = \varrho > 0$, τότε να δειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = \mu + \nu i$, $z_2 = k + \lambda i$ κινούνται σε δύο ελλείψεις που είναι όμοιες.

Π. Κουρσουμπάς

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης,, Ν. Κατσάς, Π. Κουρσουμπάς, Ε. Μήτσιου.

Λύση :

Επειδή $|z| = \varrho \Leftrightarrow \frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2} = \varrho^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu^2}{\alpha^2\varrho^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2\varrho^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu^2}{(\alpha\varrho)^2} + \frac{\nu^2}{(\beta\varrho)^2} = 1$$

Άρα η εικόνα του z_1 κινείται στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{(\alpha\varrho)^2} + \frac{y^2}{(\beta\varrho)^2} = 1$ (1)

εκτός των κορυφών της αφού $\mu, \nu \in \mathbb{R}^*$)

Όμοια $|w| = \varrho \Leftrightarrow \frac{\beta^2 \kappa^2}{\alpha^4} + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = \varrho^2 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\left(\frac{\alpha^2\varrho}{\beta}\right)^2} + \frac{\lambda^2}{(\alpha\varrho)^2} = 1$

Επομένως η εικόνα του z_2 κινείται στην έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\alpha^2\varrho}{\beta}\right)^2} + \frac{y^2}{(\alpha\varrho)^2} = 1 \quad (2)$$

Αφού $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha\varrho > \beta\varrho$ οπότε η έλλειψη της (1) έχει τις εστίες της στον άξονα x'x.

Ομοίως από $\alpha > \beta \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 1 \Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{\beta} > \alpha \Rightarrow \dfrac{\alpha^2\varrho}{\beta} > \alpha\varrho$ άρα και της δεύτερης έλλειψης οι εστίες βρίσκονται στον άξονα των x.

Τώρα αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εκκεντρότητες αυτών αντίστοιχα θα είναι:

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\sqrt{\alpha^2\varrho^2 - \beta^2\varrho^2}}{\alpha\varrho} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (\alpha^2 - \beta^2)}}{\alpha\varrho} = \frac{\varrho\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha\varrho} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha^4\varrho^2}{\beta^2} - \alpha^2\varrho^2}}{\dfrac{\alpha^2\varrho}{\beta}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha^4\varrho^2 - \alpha^2\beta^2\varrho^2}{\beta^2} - \alpha^2\varrho^2}}{\dfrac{\alpha^2\varrho}{\beta}} = \frac{\dfrac{\varrho\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta}}{\dfrac{\alpha^2\varrho}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}$$

Άρα $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ δηλ. οι ελλείψεις είναι όμοιες.

ΣΧΟΛΙΟ

Προφανώς ορίζονται δύο ελλείψεις: $\dfrac{x^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{y^2}{\beta_1^2} = 1$ και $\dfrac{x^2}{\alpha_2^2} + \dfrac{y^2}{\beta_2^2} = 1$

ως όμοιες αν και μόνο αν $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$ αφού

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{\alpha_2^2 - \beta_2^2}{\alpha_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} = 1 - \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} \Leftrightarrow \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

Γ25. Έστω οι $\nu \times \nu$ πίνακες A, B με B αντιστρέψιμο και $A \cdot B^2 + A = B$

α) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

β) Αν $|A + I| = 1$ τότε $|B + B^{-1} + I| = |B + B^{-1}|$

γ) Αν $(B^2 + I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \mathbf{O}$, τότε να βρεθούν οι $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in \mathbb{R}$

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν.Λιάπης.

Λύση :

α) Επειδή $AB^2 + A = B \Leftrightarrow$
$(AB^2 + A)B^{-1} = BB^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB^2B^{-1} + AB^{-1} = I \Leftrightarrow AB + AB^{-1} = I \Leftrightarrow A(B + B^{-1}) = I.$

Άρα ο A είναι αντισατρέψιμος και $A^{-1} = B + B^{-1}$ (1)

β) Από την (1) προκύπτει $|A^{-1}| = |B + B^{-1}| \Rightarrow |B + B^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ (2)

Αφού $|I + A| = 1 \Leftrightarrow |AA^{-1} + A| = 1 \Rightarrow |A(A^{-1} + I)| = 1 \Leftrightarrow |A||A^{-1} + I| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |A^{-1} + I| = \dfrac{1}{|A|}$ και επειδή $A^{-1} = B + B^{-1} \Rightarrow |B + B^{-1} + I| = \dfrac{1}{|A|}$ (3)

Από τις (2) και (3) : $|B + B^{-1} + I| = |B + B^{-1}|$

γ) Είναι $AB^2 + A = B \Leftrightarrow A(B^2 + I) = B \Leftrightarrow B^2 + I = A^{-1}B$ (4)

Τότε το * ομογενές σύστημα:

$$(B^2+I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^{-1}B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \mathbf{O} \Leftrightarrow A\left(A^{-1}B\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = A\mathbf{O} \Rightarrow B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \mathbf{O} \Leftrightarrow$$

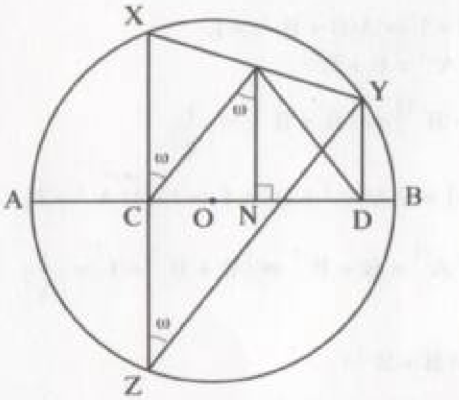
$$\Leftrightarrow B^{-1}B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \mathbf{O} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0$$

* Πράγματι η σχέση $(B^2+I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \mathbf{O}$ ισοδυναμεί με ομογενές $\nu \times \nu$ σύστημα με αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, οπότε μια άλλη απόδειξη βασίζεται στο ότι: $AB^2 + A = B \Rightarrow A(B^2 + I) = B \Rightarrow |A||B^2 + I| = |B| \Rightarrow |B^2 + I| \neq 0$ (αφού A, B αντιστρ.$\Rightarrow |A| \neq 0, |B| \neq 0$) $\Rightarrow$ το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Γ26. Μια χορδή σταθερού μήκους γλιστρά γύρω και μέσα σ' ένα ημικύκλιο. Το μέσο M και τα άκρα X, Ψ αυτής προβάλλονται πάνω στη διάμετρο AB του ημικυκλίου στα σημεία N, C, D αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο MCD είναι ισοσκελές και ότι το πηλίκο του ύψους MN προς τη βάση CD είναι σταθερό καθώς η χορδή γλιστρά στο ημικύκλιο.

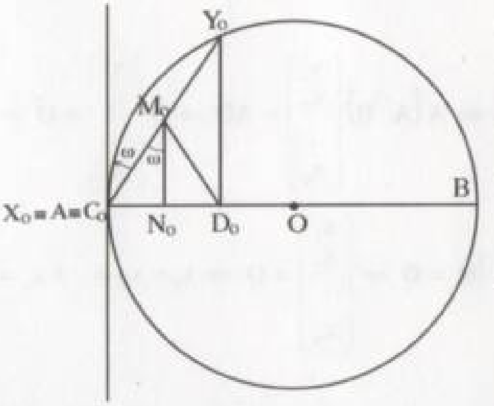
Δ. Γαλανάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Δ. Γαλανάκης, Γ. Τσιτσίνιας .



Λύση :

Για κάθε θέση της χορδής XY έχουμε απ' το τραπέζιο XCDY (σχ. 1) όπου η MN είναι διάμεσος ή απ' το τρίγωνο AY_oD_o (σχ. 2), όπου η MN περνά από το μέσο του AY_o και είναι παράλληλη προς Y_oD, ότι MN (ή M_oN_o) μεσοκάθετος στο CD. Άρα MC = MD. Αν τώρα Z είναι το συμμετρικό του X ως προς AB, η γωνία $\hat{\omega} = \widehat{XZY}$ είναι σταθερού μέτρου



(εγγεγραμμένη στο τόξο $\overset{\frown}{XY}$ σταθερού μέτρου αφού η χορδή XY είναι σταθερού μήκους).

Επειδή η MC ενώνει τα μέσα των XY και XZ, είναι στο XYZ CM // YZ ⇒

$$\widehat{XCM} = \widehat{XZY} = \hat{\omega} \Rightarrow \widehat{CMN} = \hat{\omega}$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{CMN}$ μεταβάλλεται διατηρώντας μια οξεία γωνία του σταθερή.

Δηλαδή παραμένει όμοιο προς σταθερό τρίγωνο.

(π.χ. προς το « ειδικό » τρίγωνο $A\overset{\triangle}{M_o}N_o$ του σχήματος (2) όπου

$$AY_o = X_oY_o = XY = \ell\,)$$

Επομένως $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{MN}{2CN} = \dfrac{1}{2}\dfrac{MN}{CN} = \dfrac{1}{2}\,\sigma\varphi\omega = \mathbf{ct}$ ή

$$\frac{MN}{CD} = \frac{MN}{2CN} = \frac{1}{2}\frac{MN}{CN} = \frac{1}{2}\frac{M_oN_o}{AN_o} = ct$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η CM μεταβάλλεται παραμένοντας παράλληλη προς σ' αυτή (διατηρεί σταθερή διεύθυνση).

Γ27. Αν $|z + 1| = 2$ να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{2z}{z+1}\right) = \mathrm{Arg}(z) + \frac{\pi}{2}$$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ.Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ο.Μοσχίδης.

Λύση :

Είναι: $\dfrac{2z}{z+1} = \left|\dfrac{2z}{z+1}\right|\left(\sigma\upsilon\nu\mathrm{Arg}\left(\dfrac{2z}{z+1}\right) + i\eta\mu\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{2z}{z+1}\right)\right)$ άρα

$$\frac{2z}{z+1} = \frac{2|z|}{|z+1|}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\mathrm{Arg}\,(z) + \frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(\mathrm{Arg}\,(z) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad (1)$$

Αλλά $|z + 1| = 2$. Έτσι η (1) γίνεται:

$$\frac{2z}{z+1} = |z|\left[\sigma\upsilon\nu\left(\mathrm{Arg}\,(z) + \frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(\mathrm{Arg}\,(z) + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{z+1} = z \cdot i \Leftrightarrow 2z = z\,(z+1)\,i \overset{z \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 = (z+1)\,i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z + 1 = \frac{2}{i} = -2i \Leftrightarrow z = -1 - 2i$$

Είναι $z \neq 0$ γιατί αν $z = 0 \Rightarrow |z+1| = |1| = 1 \neq 2$

ΣΧΟΛΙΟ

Μια άλλη λύση είναι εκείνη κατά την οποία ονομάζουμε

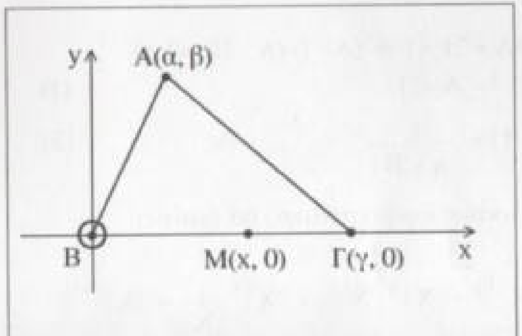
$z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ κ.λ.π.

Γ28. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ. Να δειχτεί ότι υπάρχει σημείο Μ της πλευράς ΒΓ, ώστε $(MA) \cdot (MB) = 19\,(M\Gamma)^{96}$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ο. Μοσχίδης, Γ.Τσιτσίνιας.

Λύση :



Ζητούμε σημείο Μ $(x_o, 0)$ με το $x_o \in (0, \gamma)$:

η συνάρτηση $f: [0, \gamma] \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = (MA)\,(MB) - 19\,(M\Gamma)^{96} =$

$= \sqrt{(\alpha - x)^2 + \beta^2} \cdot x - 19\,(M\Gamma)^{96}$

να δίνει $f(x_o) = 0$.

Είναι φανερό ότι η f είναι συνεχής στο $[0, \gamma]$ και $f(0) = -19\gamma^{96} < 0$ ενώ

$$f(\gamma) = \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\cdot\gamma > 0 \Rightarrow f(0)\,f(\gamma) < 0 \overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow} \exists\, x_o \in (0, \gamma): f(x_o) = 0.$$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_o, 0)$ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε

$$(MA)\,(MB) - 19(M\Gamma)^{96} = 0 \Leftrightarrow (MA)\,(MB) = 19(M\Gamma)^{96}$$

Γ29. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + x + 3,$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και ο πίνακας Α τύπου $\nu \times \nu$ για τον οποίο ισχύουν $A^2 - 3A + I = \mathbf{O}$ και $|A| = 3\beta^2 - 8\alpha\gamma$.

α) Να δειχτεί ότι η f έχει δύο σημεία καμπής.

β) Να δειχτεί ότι

$$|\operatorname{adj}(A - I)| = |A - I|^{\nu}\cdot|A - 2I|$$

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

α) Η συνάρτηση f με

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \gamma x^2 + x + 3$$

με $\boxed{\alpha \neq 0}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$.

Για να έχει δύο σημεία καμπής αρκεί η $\Delta = 36\beta^2 - 96\alpha\gamma = 12(3\beta^2 - 8\alpha\gamma) = 12\,|A|$ του τριωνύμου να είναι θετική. Έτσι αρκεί $|A| > 0$.

Ισχύει η $A^2 - 3A + I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A(3I - A) = I$ οπότε Α αντιστρέψιμος $\Rightarrow |A| \neq 0$.

Επίσης $\quad A^2 - 3A + I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^2 - 2A + I = A \Leftrightarrow (A - I)^2 = A \Rightarrow$

$\Rightarrow |A - I|^2 = |A| \Rightarrow |A| \geq 0$. Όμως $|A| \neq 0$ οπότε $|A| > 0$

Ώστε η $f''(x) = 0$ έχει δύο ρίζες εκατέρωθεν των οποίων η $f''(x)$ (ως τριώνυμο) αλλάζει πρόσημο. Έτσι η f έχει δύο σημεία καμπής.

β) Από το προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι $|A - I|^2 = |A| > 0$ οπότε $|A - I| \neq 0$ και ο Α - Ι είναι αντιστρέψιμος.

Είναι δε $\quad A^2 - 3A + I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^2 - 3A + 2I = I \Leftrightarrow (A - I)(A - 2I) = I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (A - I)^{-1} = A - 2I \qquad (1)$$

Τότε

$$|A - I| = \frac{1}{|A - 2I|} \qquad (2)$$

Λόγω της : $\quad X^{-1} = \dfrac{1}{|X|}\operatorname{adj}X$ (για αντιστρέψιμο πίνακα) θα έχουμε:

$$\operatorname{adj}X = |X|\,X^{-1} \Rightarrow |\operatorname{adj}X| = \left|\,|X|\,X^{-1}\right| = |X|^{\nu}\left|X^{-1}\right| = |X|^{\nu}\frac{1}{|X|} = |X|^{\nu-1}$$

Έτσι για Χ = Α - Ι έχουμε:

$$|\operatorname{adj}(A - I)| = |A - I|^{\nu-1} = |A - I|^{\nu}\frac{1}{|A - I|} \overset{(2)}{=} |A - I|^{\nu}\cdot|A - 2I|$$

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν. Καζαντζής, Ν. Κατσάς.

Γ30. Για τον $\nu \times \nu$ πίνακα Α ισχύει:

$$|(\sigma\upsilon\nu x)A| = |(x - 1)\,A| \quad (1)$$

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία ρίζα ή άπειρες ρίζες στο $(\pi/3, \pi/2)$.

Κ. Γκατζούλης

Λύση :

● Αν ο Α **δεν** είναι αντιστρέψιμος τότε $|A| = 0$ οπότε αν

$$f(x) = |(\sigma\upsilon\nu x)A| - |(x - 1)\,A| = \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,|A| - (x - 1)^{\nu}\,|A| = 0 \quad \forall\, x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(άπειρες ρίζες)

● Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος τότε, η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} - \left(\frac{\pi}{3} - 1\right)^{\nu}\right]\left[-\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{\nu}\right]|A|^2 = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} - \left(\frac{\pi}{3} - 1\right)^{\nu}\right]\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{\nu}|A|^2 < 0$$

γιατί: $\quad \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi - 2}{2} > 0$ και $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu} - \left(\dfrac{\pi}{3} - 1\right)^{\nu} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu} - \left(\dfrac{\pi - 3}{3}\right)^{\nu} =$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{(\pi - 3)}{3}\right]\cdot\Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-2}\cdot\left(\frac{\pi - 3}{3}\right) + \dots + \left(\frac{\pi - 3}{3}\right)^{\nu-1}}_{\theta}\Bigg] = \frac{(9 - 2\pi)}{6}\cdot\theta > 0$$

Άρα η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Τώρα είναι:

$$f'(x) = [\nu\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x(-\eta\mu x) - \nu(x - 1)^{\nu-1}]\,|A| = -\nu\,[\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x + (x - 1)^{\nu-1}]\,|A|$$

Εάν $|A| > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και f γνησίως φθίνουσα.

Εάν $|A| < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και f γνησίως αύξουσα.

Σε κάθε περίπτωση η f είναι γνησίως μονότονη άρα έχει μοναδική ρίζα στο $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (αφού έχει μία τουλάχιστον)

Γ31. Να βρεθεί ο $k \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει το

$$\lim_{\alpha \to 1}\left[\frac{1}{\alpha - 1} + \frac{k}{(\alpha - 1)^2}\int_1^\alpha \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)(2t+3)}\right]$$

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ε. Μήτσιου.

Λύση :

Είναι:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{k}{(\alpha - 1)^2}\int_1^\alpha \frac{t^2}{(t^2+1)(2t+3)}\,dt = \frac{(\alpha - 1) + k\displaystyle\int_1^\alpha \frac{t^2}{(t^2+1)(2t+3)}\,dt}{(\alpha - 1)^2}$$

Επειδή η $f(t) = \dfrac{t^2}{(t^2+1)(2t+3)}$ συνεχής, η $\displaystyle\int_1^\alpha \frac{t^2}{(t^2+1)(2t+3)}\,dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

οπότε $\displaystyle\lim_{\alpha \to 1}\int_1^\alpha \frac{t^2}{(t^2+1)(2t+3)}\,dt = \int_1^1 \frac{t^2}{(t^2+1)(2t+3)}\,t = 0.$

Έτσι η αναζήτηση του $\lim_{\alpha \to 1} F(\alpha)$ οδηγεί στη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ οπότε αναζητούμε το

(L' Hospital)

$$\lim_{\alpha \to 1}\frac{\left[(\alpha - 1) + k\displaystyle\int_1^\alpha \frac{t^2}{(t^3+1)(2t+3)}\,dt\right]'}{\left[(\alpha - 1)^2\right]'} = \lim_{\alpha \to 1}\frac{1 + k\dfrac{\alpha^2}{(\alpha^2+1)(2\alpha+3)}}{2(\alpha - 1)} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 1}\frac{(\alpha^2+1)(2\alpha+3) + k\alpha^2}{2(\alpha - 1)(\alpha^2+1)(2\alpha+3)}.$$

Αλλά $\lim_{\alpha \to 1}\left[(\alpha^2+1)(2\alpha+3) + k\alpha^2\right] = 10 + k$, ενώ $\lim_{\alpha \to 1}\left[2(\alpha - 1)(\alpha^2+1)(2\alpha+3)\right] = 0$

με $2(\alpha - 1)(\alpha^3+1)(2\alpha+3) > 0$ αν $\alpha \to 1^+$

και $2(\alpha - 1)(\alpha^3+1)(2\alpha+3) < 0$ αν $\alpha \to 1^-$

Έτσι αν $10 + k \neq 0$ το $\lim_{\alpha \to 1} F(\alpha)$ δεν υπάρχει αφού $\lim_{\alpha \to 1^-} F(\alpha) = \mp\infty$ και $\lim_{\alpha \to 1^+} F(\alpha) = \pm\infty$. Άρα πρέπει $k = -10$ για να υπάρχει το $\lim_{\alpha \to 1} F(\alpha)$.

Τότε $$F(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha + 3 - 10\alpha^2}{2(\alpha - 1)(\alpha^2+1)(2\alpha+3)} = \frac{2\alpha^3 - 7\alpha^2 + 2\alpha + 3}{2(\alpha - 1)(\alpha^2+1)(2\alpha+3)} =$$

$$= \frac{(\alpha - 1)(2\alpha^2 - 5\alpha - 3)}{2(\alpha - 1)(\alpha^2+1)(2\alpha+3)} = \frac{2\alpha^2 - 5\alpha - 3}{2(\alpha^2+1)(2\alpha+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to 1} F(\alpha) = \frac{2 - 5 - 3}{2(1+1)(2\cdot 1 + 3)} = \frac{2 - 8}{2\cdot 2\cdot 5} = \frac{-6}{20} = -\frac{3}{10}$$

Γ32. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε $(f(x))^3 + f(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί το $\lim_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Γ. Μπαϊλάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ο. Μοσχίδης.

Λύση :

Αφού $x \to +\infty$ θεωρούμε ότι $x \in (\beta, +\infty)$ με $\beta > 0$ δηλ. $x > 0$.

Τότε η (1) $(f(x))^3 + f(x) = x^3 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(x)\left((f(x))^2 + 1\right) = x^3 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Άρα από $f^3(x) + f(x) = x^3 \Rightarrow f^3(x) < x^3 \Rightarrow f(x) < x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x^3} < \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{x^3}\right| < \dfrac{1}{x^2}$ γιατί

γιατί $\dfrac{f(x)}{x^3} > 0$. Επειδή $\lim_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{x^3} = 0$ (2)

Η (1) γράφεται $\dfrac{f^3(x)}{x^3} + \dfrac{f(x)}{x^3} = 1$ και επειδή $\lim_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{x^3} = 0$ και

$$\frac{f^3(x)}{x^3} = 1 - \frac{f(x)}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\frac{f^3(x)}{x^3} = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{f(x)}{x^3}\right) = 1 - \lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x^3} = 1 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} = 1.$$

Γ33. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = f(-x) + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης, Ο. Μοσχίδης.

1η Λύση :

Επειδή $f(x)$ παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ οπότε και η $f(-x)$ παραγωγίσιμη (ως σύνθεση παραγωγισίμων), προκύπτει ότι η (1) $f'(x) = f(-x) + f(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (2) $f''(x) = -f'(-x) + f'(x)$.

Από την (1) έχουμε:

$f'(-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow -f'(-x) + f'(x) = -f(x) - f(-x) + f(-x) + f(x) = 0.$

Άρα $\quad f''(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = c \Rightarrow \mathbf{f(x) = cx + c_1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$

Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = c_1$ αλλά $f'(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow c = 2c_1 = 2f(0)$

Άρα η (3) γίνεται $\quad \mathbf{f(x) = 2f(0)x + f(0)}$

2η Λύση :

Η $\quad f'(x) = f(-x) + f(x) \quad (1)$

για $x \to -x$ γίνεται: $\quad f'(-x) = f(x) + f(-x) \quad (2)$

δηλ. $f'(x) = f'(-x) \Rightarrow (f(x))' = (-f(-x))' \Rightarrow f(x) = -f(-x) + c \Rightarrow f(-x) + f(x) = c \Rightarrow$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x) + c \Rightarrow f(x) = cx + c_1 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Γ34. Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής και κυρτή στο κλειστό διάστημα [0, 1], παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (0, 1). Να αποδείξετε ότι αν $f(0) = f(1) = 0$, τότε η $f'(x) = f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο (0, 1).

Κ. Αβραμίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν. Καζαντζής, Ν. Λιάπης.

Λύση :

<u>Ύπαρξη ρίζας.</u> Αρκεί η εξίσωση $f'(x) - f(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1) ή ισοδυνάμως αρκεί η: $f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x} + f(x)(e^{-x})' = 0$$
$$\Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = 0$$

να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1). Επομένως αρκεί για την Φ με

$$\Phi(x) = f(x)e^{-x}$$

να εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο [0, 1]. Η Φ συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1) (ως γινόμενο συνεχών και παραγωγισίμων αντίστοιχα στα αναφερόμενα διαστήματα). Επίσης $\Phi(0) = f(0)\, e^{o} = 0 = \Phi(1)\ (= f(1)\, e^{-1})$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0, 1)$:

$$\Phi'(x_o) = 0 \text{ δηλ. } f'(x_o)\, e^{-x_o} - f(x_o)\, e^{-x_o} = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) = f(x_o)$$

<u>Μοναδικότητα.</u> Εφόσον η f κυρτή η f' γνησίως αύξουσα στο [0, 1]. Αν η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (0, 1) τότε η f γνησίως μονότονη άρα και 1 - 1.

x	0	1
f'(x)	↗	

Όμως $f(0) = f(1) = 0$. Άτοπο.

Άρα η f' δε διατηρεί σταθερό πρόσημο και εφόσον είναι γνησίως αύξουσα θα υπάρχει $\beta \in (0, 1)$: $f'(x) < 0 \quad \forall x \in [0, \beta)$ και $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\beta, 1]$

(Δε γνωρίζουμε αν η f' είναι συνεχής).

x	0		β		1
f'(x)		- ↗		+	
f(x)	0	↘	f(β)	↗	0

Η f γνησίως φθίνουσα στο [0, β] και γνησίως αύξουσα στο [β, 1] και συνεχής στο β. Άρα f(β) ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ.

Τώρα: $\left\{\begin{array}{l}\beta \text{ εσωτερικό σημείο του } [0, 1] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } \beta \\ \text{Στο } \beta \text{ παρουσιάζει ΕΛΑΧΙΣΤΟ}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\overset{\text{Θ. Fermat}}{\Rightarrow} f'(\beta) = 0$$

Άρα

x	0	x_o	β		1
f'(x)		-	0	+	
f(x)	0	-	- ↘ f(β)	↗	0

Τη (μία τουλάχιστον) ρίζα x_o που αποδείξαμε ότι έχει η εξίσωση $f'(x) = f(x)$ θα την έχει στο διάστημα (0, β) διότι εκεί είναι ομόσημες οι f(x) και f'(x).

Όμως στο (0, β) (και στο [0, β]) η f είναι γνησίως φθίνουσα ενώ η f' είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f'(x) - f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1 - 1.

Συνεπώς η εξίσωση $f'(x) - f(x) = 0$ δηλ. η $f'(x) = f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο (0, β) και εφόσον αδύνατη αλλού έχει μοναδική στο (0, 1).

Γ35. Δίνεται η εξίσωση $z^5 + 4z^3 - 1 = 0$ και έστω A_o, A_1, A_2, A_3, A_4 οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο. Αν <u>P είναι η εικόνα μιας πέμπτης ρίζας</u> της μονάδας να αποδείξετε ότι

$$(PA_o)(PA_1)(PA_2)(PA_3)(PA_4) = 4$$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Γ. Τσιτσίνιας

Λύση :

Αν είναι z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 οι ρίζες της $z^5 + 4z^3 - 1 = 0$, θα έχουμε

$$(1) \qquad z^5 + 4z_3 - 1 = (z - z_o)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

Ας είναι j μια πέμπτη ρίζα της μονάδας. Τότε η (1) για z = j γίνεται:

$$j^5 + 4j^3 - 1 = (j - z_o)(j - z_1)(j - z_2)(j - z_3)(j - z_4) \Rightarrow$$

$$\overset{j^5 = 1}{\Rightarrow} 4j^3 = (j - z_o)(j - z_1)(j - z_2)(j - z_3)(j - z_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |4j^3| = |j - z_o|\,|j - z_1|\,|j - z_2|\,|j - z_3|\,|j - z_4| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4|j|^3 = |j - z_o|\,|j - z_1|\,|j - z_2|\,|j - z_3|\,|j - z_4| \Rightarrow$$

$$(2) \qquad |j - z_o|\,|j - z_1|\,|j - z_2|\,|j - z_3|\,|j - z_4| = 4 \text{ (αφού } |j| = 1)$$

Επειδή $|z_1 - z_2| = d(M_1, M_2) = (M_1M_2)$ όπου M_1, M_2 οι εικόνες των z_1, z_2
η (2) γίνεται $(PA_0)(PA_1)(PA_2)(PA_3)(PA_4) = 4$

Γ36. Για τον 4×4 πίνακα Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς ισχύει $A^2 = (-1/3)\,I$. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = |A + xI|.$$

Ν. δ. ο. υπάρχει $x_o \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x_o, f(x_o))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Μήτσιου Ελένη.

Λύση :

Είναι $A^2 = -\frac{1}{3}I \Leftrightarrow 3A^2 + I = \mathbf{O} \Leftrightarrow$

$A^3+3A^2+3A+I = A^3+3A+3A^2+I = A^3+3A \Leftrightarrow$

$(A + I)^3 = A^3 + 3A \Leftrightarrow$

$(A + I)^3 = A\,(A^2 + 3I) \Rightarrow$

$|A + I|^3 = |A|\,|A^2 + 3AI|$ (1)

Επίσης είναι $A^3 - 3A^2 + 3A - I = A^3 + 3A - (3A^2 + I) = A^3 + 3A \Rightarrow$

$(A - I)^3 = A^3 + 3A \Rightarrow |A - I|^3 = |A|\,|A^2 + 3I|$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow |A + I|^3 = |A - I|^3 \Rightarrow f(1) = f(-1)$.

Η f με $f(x) = |A + xI|$ είναι πολυωνυμική άρα παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ και επομένως λόγω και της $f(1) = f(-1)$ ισχύει το Θ. Rolle στο $[-1, 1]$.

Έτσι $\exists\, x_o \in (-1, 1)$: $f'(x_o) = 0$.

Δηλαδή υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη προς τον x'x.

Γ37. Υποθέτουμε ότι $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(0) = 0 = f(1)$ και ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι:

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > 4$$

Δ. Γαλανάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ- Ν Ιωσηφίδης, οι οποίοι επισήμαναν ότι το $\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx$ δεν ορίζεται αφού $f(0) = 0 = f(1)$

ΣΧΟΛΙΟ

Ο προτείνων θεωρεί το μη γνήσιο ολοκλήρωμα (γενικευμένο):

$$I = \int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx$$

Έτσι το θέμα είναι εκτός ΥΛΗΣ.

Γ38. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g(x), h(x)$ ισχύουν οι συνθήκες

$$h(\beta) = g(\alpha),\ g(\beta) = h(\alpha),\ g(x) \neq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) < g'(x)$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in [\alpha, \beta]$ ώστε τα διανύσματα

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ h(x) \end{bmatrix},\quad \vec{v} = \begin{bmatrix} g(x) \\ 1 \end{bmatrix}$$

να είναι κάθετα.

Γ. Σαράφης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-1)\,g(x) + h(x)\,1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x) - g(x) = 0$

Έστω $f(x) = h(x) - g(x)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά παραγωγισίμων και

$f(\alpha) = h(\alpha) - g(\alpha) = h(\alpha) - h(\beta)$ και $f(\beta) = h(\beta) - g(\beta) = h(\beta) - h(\alpha)$

Επειδή $f'(x) = h'(x) - g'(x) < 0 \Rightarrow f$ γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού $\alpha < \beta$ και f γν. φθίνουσα $\Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow h(\alpha) - h(\beta) > h(\beta) - h(\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2h(\alpha) > 2h(\beta) \Rightarrow h(\alpha) > h(\beta)$.

Ώστε αποκλείεται να είναι $f(\alpha) = h(\beta) \Rightarrow f(\alpha) = h(\alpha) - h(\beta) > 0$ ενώ

$f(\beta) = h(\beta) - h(\alpha) < 0$.

Έτσι $f(\alpha)\,f(\beta) < 0 \overset{Bolzano}{\Rightarrow} \exists\, x_o \in (\alpha, \beta)$: $f(x_o) = 0 \Rightarrow h(x_o) - g(x_o) = 0$ (1)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $[\alpha, \beta]$ το x_o είναι μοναδικό.

Γ39. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $f(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Γ. Μπαϊλάκης

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Ισχύει η $f(x) = e^{x - f(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Η f είναι 1 - 1. Πράγματι αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1 - f(x_1)} = e^{x_2 - f(x_2)} \Rightarrow x_1 - f(x_1) = x_2 - f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη δηλ. ορίζεται η $x = f^{-1}(x)$ στο $f(A) = f(R)$ (όπου $y = f(x)$)

- Επειδή $e^{\ln y} = y$ και $e^{x - y} = y$ $\forall y > 0$ (το $e^{x - y} = y$ είναι η $f(x) = e^{x - f(x)}$) άρα $e^{x - y} = e^{\ln y} \Rightarrow x - y = \ln y \Leftrightarrow x = y + \ln y \Rightarrow x = f^{-1}(y) = y + \ln y$.
- Η $f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ (ως άθροισμα γνησίως αυξουσών) και συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Άρα η αντίστροφη της f^{-1}, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Αφού η f^{-1} ορίζεται στο $(0, +\infty)$, τότε $f(A) = f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

Γ40. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου τέτοια ώστε: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |\vec{\alpha} + x\vec{\beta}|$.

Αν ισχύει η σχέση $\int_1^x f(t)\,dt \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

ii) $f(x) = |x + 1|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Ν. Κατσάς, Ο. Μοσχίδης, Σ. Σκοτίδας, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt - 2x + 2$$

Από την υπόθεση είναι $F(x) \geq 0$ και $F(1) = 0$ οπότε η F παρουσιάζει στο $x_o = 1$ ελάχιστο.

Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (οπότε και στο $x_o = 1$) θα είναι (Fermat) $F'(1) = 0$. Όμως είναι

$$F'(x) = f(x) - 2 = |\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| - 2 \Rightarrow F'(1) = f(1) - 2 = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - 2 = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2.$$

Αλλά και $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

Αφού λοιπόν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Τότε $f(x) = |\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + x\vec{\alpha}| = |(1 + x)\vec{\alpha}| = |1 + x|\,|\vec{\alpha}| = |1 + x| = |x + 1|$

Γ41. Έστω (γ) το διάγραμμα της $y = f(x)$ η οποία είναι (αυστηρά) αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (0, \pi)$ και $M(x, f(x))$ τυχαίο σημείο του διαγράμματος για $0 < x < \pi$.

α) Να βρεθούν τα σημεία Α, Β στα οποία κόβουν τον x'x η εφαπτομένη και η κάθετη της (γ) στο Μ.

β) Αν Σ η προβολή του Μ στον x'x και

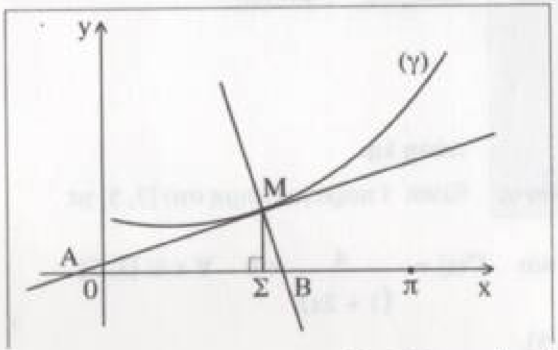
$$\frac{(\Sigma B)}{(\Sigma A)} = x^2 \eta\mu^2 x \quad \mu\varepsilon \quad 0 \leq x \leq \pi$$

να βρεθεί η f αν διέρχεται από το $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

γ) Ν.δ.ο. $f(x) > 0$ στο $(0, \pi)$ και ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το (γ) και τον x'x είναι 4 τ. μονάδες.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ε. Μήτσιου.



Λύση :

α) Η εφαπτομένη στο $M(x, f(x))$ έχει εξίσωση

(1) $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$

και τέμνει τον άξονα των x'x στο Α που έχει $Y_A = 0$ και από την (1) προκύπτει

$$X_A = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{έτσι}$$

$$A\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\right) \quad (\text{είναι } f'(x) \neq 0)$$

Η κάθετη του (γ) στο Μ (δηλαδή η κάθετη στην εφαπτομένη στο $M(x, y)$) έχει εξίσωση

$$Y - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(X - x) \qquad (2)$$

και τέμνει τον x'x στο $B(x + f(x)f'(x), 0)$ (Προκύπτει από την (2) για $Y_B = 0$)

β) Είναι Σ η προβολή του Μ στον x'x οπότε $\Sigma(x, 0)$ και

$$\frac{(\Sigma B)}{(\Sigma A)} = \frac{|x_B - x|}{|x_A - x|} = \frac{|f(x)f'(x)|}{\left|-\frac{f(x)}{f'(x)}\right|} = \frac{|f(x)||f'(x)|}{\frac{|f(x)|}{|f'(x)|}} = |f'(x)|^2 = (f'(x))^2 \qquad (3)$$

Επειδή ισχύει: $\frac{(\Sigma B)}{(\Sigma A)} = x^2\eta\mu^2 x \quad 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow (f'(x))^2 = x^2\eta\mu^2(x) \Leftrightarrow f'(x) = x\eta\mu x$

(αφού $f'(x) > 0$ διότι f γν. αύξουσα και $f'(x) \neq 0$) $\forall x \in [0, \pi]$

Άρα $\int f'(x)\,dx = \int x\eta\mu x\,dx = (-x\sigma\upsilon\nu x) - \int(-\sigma\upsilon\nu x)(x)'\,dx = -x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c \qquad (4)$$

Επειδή διέρχεται από το $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ πρέπει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c \qquad (5)$$

γ) Επειδή $f'(x) = x\eta\mu x > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$, άρα $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$.

x	0		π
f'(x)	0	+	0
f(x)	0	↗	π

Τότε $E = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (ημx - xσυνx)\,dx =$

$$= \int_0^{\pi} ημx\,dx - \int_0^{\pi} xσυνx\,dx = \ldots = 4 \text{ τ.μ.}$$

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Γ42. Εστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{1+t}\,dt.$$

Δείξτε ότι $\frac{4}{11} < f(5) - f(3) < \frac{4}{7}$

Γ. Σαράφης

Λύση 1η:

Είναι f παραγωγίσιμη στο [3, 5] με

$$f'(x) = \frac{1}{1+2x}(2x)' = \frac{2}{1+2x} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{4}{(1+2x)^2} < 0 \quad \forall x \in [3, 5].$$

Έτσι η f' είναι γν. φθίνουσα στο [3, 5].

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο [3, 5] προκύπτει ότι $\exists\, \xi \in (3, 5)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(3)}{2}$$

Αφού $3 < \xi < 5 \overset{f' \text{ γν. φθίν.}}{\Rightarrow} f'(3) > f'(\xi) > f'(5) \Rightarrow \frac{2}{1 + 2\cdot 5} < \frac{f(5) - f(3)}{2} < \frac{2}{1 + 2 \cdot 3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{11} < \frac{f(5) - f(3)}{2} < \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{4}{11} < f(5) - f(3) < \frac{4}{7}$$

Λύση 2η:

Είναι $f(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\ln(1+t)\right]_1^{2x} = \ln(1+2x) - \ln(1+1) = \ln(1+2x) - \ln 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(5) - f(3) = \ln 11 - \ln 7 \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Μέσης Τιμής για την $g(x) = \ln x$ στο [7, 11] και έχουμε ότι

$$\exists\, \xi \in (7, 11): \quad \frac{g(11) - g(7)}{11 - 7} = g'(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad \text{δηλ.}$$

$$\frac{\ln 11 - \ln 7}{4} = \frac{1}{\xi} \qquad (2)$$

Όμως $7 < \xi < 11 \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{\ln 11 - \ln 7}{4} < \frac{1}{7}$ ή $\frac{4}{11} < \ln 11 - \ln 7 < \frac{4}{7}$

και λόγω της (1) $\quad \frac{4}{11} < f(5) - f(3) < \frac{4}{7}$

Λύση έστειλαν οι: Θ.Ν.Καζαντζής, Ν. Κατσάς.

Γ43. Υποθέτουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$|f(x)| \le 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και $\quad f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4.$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_o \in \mathbb{R}$:

$$f(x_o) + f''(x_o) = 0$$

Δ. Γαλανάκης

Λύση :

Θέτω $\quad A(x) = f^2(x) + f'^2(x) \quad$ και

$$\omega(x) = f(x) + f''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η ω(x) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για το ζητούμενο αρκεί να δειχτεί ότι δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε το αντίθετο,

π.χ.: ότι είναι $\omega(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έχουμε $A'(x) = 2f'(x)\omega(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, αφού $f^2(0) \le 1$, θα είναι $f'^2(0) \ge 3$

και $\quad f'(0) \ge \sqrt{3} \quad$ είτε $\quad f'(0) \le -\sqrt{3}$

Εξετάζουμε την περίπτωση $\mathbf{f'(0) \ge \sqrt{3}}$. (Η άλλη ανάλογα).

Παρατηρούμε ότι, αφού η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι $\quad f'(0) \ge \sqrt{3} > 1$

υπάρχει διάστημα $[0, \delta]$ $(\delta > 0)$ με $f'(x) > 1$ για $0 \le x \le \delta$.

Τότε όμως είναι και $A'(x) = 2f'(x)\,\omega(x) > 0$ για $x \in [0, \delta]$ οπότε A(x) αυστηρώς αύξουσα στο [0, δ] και έχουμε $\quad 4 = A(0) < A(\delta)$

δηλαδή $\quad f^2(\delta) + f'(\delta) > 4$

και τελικά $\quad f'(\delta) \ge \sqrt{3}$,

αφού $|f(\delta)| \le 1$ και $f'(\delta)$ προφανώς μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

Όμοια λοιπόν συμπεραίνουμε από την συνέχεια της f' ότι υπάρχει δ_1 με $0 < \delta < \delta_1$ με $f'(x) > 1$ για $0 \le x \le \delta_1$.

Τούτο σημαίνει ότι το Supremum W του συνόλου του $\delta > 0$ με $f'(x) > 1$ για $0 \le x \le \delta$ είναι το $+\infty$. Αλλοιώς αν $\omega < \infty$ σύμφωνα με τα προηγούμενα, είναι $A(w) > 4$, $f'(w) > 1$ και υπάρχει w_1 με $0 < w < w_1$ και $f'(x) > 1$ για $0 \le x \le w_1$ (αντίφαση). Είναι λοιπόν $f'(x) > 1 \quad \forall x > 0$ και η συνάρτηση $f(x) - x$ είναι για $x > 0$ αυστηρώς αύξουσα.

Βρίσκουμε $f(0) < f(x) - x$ δηλαδή $f(x) > x + f(0) \quad \forall x > 0$ οπότε $f(x) \to +\infty$ για $x \to \infty$ (Άτοπο, αφού $|f(x)| \le 1$ στο $\mathbb{R}$.)

Το πρόσημο λοιπόν της ω(x) δεν είναι σταθερό στο $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_o \in \mathbb{R}$ με

$$\omega(x_o) = f(x_o) + f''(x_o) = 0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Με ελαφρά τροποποίηση, (σχεδόν ταυτόσημη απόδειξη) αποδεικνύεται το ζητούμενο, χωρίς τη συνέχεια της $f''(x)$. Θεωρώντας παράγουσα $\Phi(x)$ της $f(x)$, θα έχουμε $\omega(x) = \Phi'(x) + [f'(x)]'$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει σαν συνέπεια του θεωρήματος Darboux. Θεωρήσαμε σκόπιμο να περιλάβουμε στην υπόθεση και τη συνέχεια της $f''(x)$, αφού το Θ. Darboux δεν βρίσκεται στη σχετική ύλη.

Γ44. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(4-\lambda)x^2 + 2x - \lambda}{(2x+1)(x^2+1)}$$

α) Να βρεθούν τα α, β έτσι ώστε η f να γράφεται στη μορφή

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x^2+1} + \frac{\beta}{2x+1}$$

β) Να βρεθεί ο λ έτσιώστε το

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^k f(x)\,dx$$

να είναι πεπερασμένο.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης, Ε. Μήτσιου.

Λύση :

α) Η $f(x) = \dfrac{(4-\lambda)x^2 + 2x - \lambda}{(2x+1)(x^2+1)} =$

$$= \frac{\alpha x}{x^2+1} + \frac{\beta}{2x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

ισοδυναμεί με την

$(4-\lambda)x^2 + 2x - \lambda = \alpha x(2x+1) + \beta(x^2+1) \Leftrightarrow$

$(2\alpha+\beta)x^2 + \alpha x + \beta = (4-\lambda)x^2 + 2x - \lambda \Leftrightarrow$

$2\alpha + \beta = 4 - \lambda,\quad \boldsymbol{\alpha = 2}$ και $\boldsymbol{\beta = -\lambda}$

(οι $\alpha = 2$ και $\beta = -\lambda$ επαληθεύουν την $2\alpha + \beta = 4 - \lambda$)

β) Είναι $\displaystyle\int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k \frac{\alpha x}{x^2+1}\,dx + \int_0^k \frac{\beta}{2x+1}\,dx = \int_0^k \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \lambda\int_0^k \frac{1}{2x+1}\,dx$

($k > 0$ αφού $k \to +\infty$)

$$= \left[\ln(x^2+1)\right]_0^k - \frac{\lambda}{2}\left[\ln(2x+1)\right]_0^k = \ln(k^2+1) - \frac{\lambda}{2}\ln(2k+1) =$$

$$= \ln\frac{k^2+1}{(2k+1)^{\lambda/2}} = \ln\frac{k^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\left[k\left(2+\frac{1}{k}\right)\right]^{\lambda/2}} = \ln\frac{k^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{k^{\lambda/2}\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}}$$

Είναι
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{k^{\lambda/2}\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}} = \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{k^2}{k^{\lambda/2}}\cdot\frac{1+\frac{1}{k^2}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}}\right] \qquad (1)$$

Επειδή $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{k^2}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}} = \frac{1}{2^{\lambda/2}}$ παρατηρούμε ότι για το $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k^{\lambda/2}}$ ισχύουν τα:

- $2 > \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k^{\lambda/2}} = +\infty \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{k^2}{k^{\lambda/2}}\frac{1+\frac{1}{k^2}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}}\right] = +\infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\left[\ln\frac{k^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{k^{\lambda/2}\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}}\right] = +\infty$$

- $2 = \dfrac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 4} \Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k^2} = 1 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{k^2}{k^2}\frac{1+\frac{1}{k^2}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^2}\right] = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\left[\ln\frac{k^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{k^2\left(2+\frac{1}{k}\right)^2}\right] = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \in \mathbb{R}$$

- $2 < \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k^{\lambda/2}} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{k^2}{k^{\lambda/2}}\frac{1+\frac{1}{k^2}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}}\right] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\left[\ln\frac{k^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{k^{\lambda/2}\left(2+\frac{1}{k}\right)^{\lambda/2}}\right] = \lim_{u\to0^+}(\ln u) = -\infty$$

Άρα το $\lim \int_0^k f(x)\,dx$ είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν $\boxed{\lambda = 4}$

Γ45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - 2\eta\mu x,\ x \in [0, 2\pi]$.

i) Να δειχτεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να εξεταστεί αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την $(f^{-1})'(3\pi)$.

iii) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^{6\pi} f^{-1}(x)\,dx$

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℝ, άρα και στο $A = [0, 2\pi]$

$f'(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu x > 0 \quad \forall\, x \in [0, 2\pi]$

(αφού $-1 \le -\sigma\upsilon\nu x \le 1 \Rightarrow 3 - 2 \le 3 - 2\sigma\upsilon\nu x \le 2 + 3 \Leftrightarrow 1 \le 3 - 2\sigma\upsilon\nu x \le 5$)

Άρα $\forall\ x \in [0, 2\pi]$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2\pi]$.

Τότε το $f(A) = [f(0), f(2\pi)] = [0, 6\pi]$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, είναι «1 - 1», οπότε υπάρχει η f^{-1} που ορίζεται στο $f(A) = [0, 6\pi]$. Ώστε $A_{f^{-1}} = f(A) = [0, 6\pi]$.

ii) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα) στο $[0, 2\pi]$ και $f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [0, 2\pi]$ η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 6\pi]$.

Τώρα είναι γνωστό ότι: $\forall\, x \in f(A) = [0, 6\pi]$ ισχύει:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \ \ \acute{\eta}\ \ f(f^{-1}(x)) = x \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$[f(f^{-1}(x))]' = (x)' \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1 \qquad (2)$$

Για $x = 3\pi$ η (2) γίνεται

$$f'(f^{-1}(3\pi))\,(f^{-1})'(3\pi) = 1 \qquad (3)$$

Είναι όμως $f(\pi) = 3\pi - 2 \cdot 0 = 3\pi \Rightarrow f^{-1}(3\pi) = \pi$ και

$f'(f^{-1}(3\pi)) = f'(\pi) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu\pi = 3 + 2 = 5$.

Άρα η (3) γίνεται: $5\left(f^{-1}\right)'(3\pi) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(3\pi) = \frac{1}{5}$

iii) Για το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{6\pi} f^{-1}(x)\,dx$ ονομάζουμε

$$f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)\,du$$

Η συνάρτηση f(u) είναι 1- 1 και παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$ με συνεχή παράγωγο). Αν $x = 0 \Rightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0$.

Αν $x = 6\pi$ έχουμε $f(u) = 6\pi \Rightarrow f(u) = f(2\pi) \Leftrightarrow u = 2\pi$.

Άρα το $I = \int_0^{2\pi} u f'(u)\,du = \left[uf(u)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(u)\,du = \left[uf(u)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (3u - 2\eta\mu u)\,du =$

$$= \left[uf(u)\right]_0^{2\pi} - \left[3\frac{u^2}{2} + 2\sigma\upsilon\nu u\right]_0^{2\pi} = 2\pi \cdot 6\pi - \left[3\frac{4\pi^2}{2} + 2\sigma\upsilon\nu 2\pi - 2\sigma\upsilon\nu 0\right] =$$

$$= 12\pi^2 - 6\pi^2 = 6\pi^2$$

Γ46. Να βρεθεί συνάρτηση $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\int_{-x}^{x} f(t)dt = \eta\mu x$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$ και $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

Μήτσιου Ε. (από G. Turcitu)

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

Παραγωγίζοντας την $\int_{-x}^{x} f(t)dt = \eta\mu x$ παίρνουμε:

$$f(x) + f(-x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x = -\left[f(-x) - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(-x)\right].$$

Θέτοντας $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$ έχουμε $g(x) = -g(-x)$ δηλαδή η g περιττή.

Επίσης $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$ και $\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(x) + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x\right]^2 dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{4}dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Τελικά $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x,\ x \in [-\pi, \pi]$.

Γ47. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Αν $x_o \in \mathbb{R}$ είναι η μοναδική ρίζα του $P(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $P'(x_o) < 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\int_x^{x_o} P(x)\,dt \geq \int_\alpha^x P(t)\,dt \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Κ. Γκατζούλης

Λύση έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

Η αποδεικτέα γίνεται:

$$\int_\alpha^{x_o} P(t)\,dt - \int_\alpha^x P(t)\,dt \geq 0 \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_\alpha^{x_o} P(t)\,dt + \int_x^\alpha P(t)\,dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_x^{x_o} P(t)\,dt \geq 0 \qquad (2)$$

Όμως είναι $P'(x_o) < 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_o} \frac{P(x) - P(x_o)}{x - x_o} < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0: \frac{P(x) - P(x_o)}{x - x_o} < 0$

$\forall x \in U(x_o, \delta) = (x_o - \delta, x_o) \cup (x_o, x_o + \delta)$

Επειδή $P(x_o) = 0$ η προηγούμενη γίνεται: $\frac{P(x)}{x - x_o} < 0 \quad \forall x \in U(x_o, \delta)$

Άρα είναι $P(x) > 0$ αν $x \in (x_o - \delta, x_o)$ ενώ $P(x) < 0$ $\forall \in (x_o, x_o + \delta)$.

Όμως η P είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και δεν έχει άλλη ρίζα στο $[\alpha, x_o]$ οπότε η P διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, x_o]$ δηλ.

$P(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in [\alpha, x_o]$ ενώ $P(x) \leq 0$ $\forall x \in [x_o, \beta]$ (προκύπτει με παρόμοιο τρόπο). Επομένως:

- αν $x < x_o$ τότε $\int_x^{x_o} P(t)\,dt \geq 0$ αφού $P(t) \geq 0$
- αν $x > x_o$ τότε $\int_x^{x_o} P(x)\,dt = \int_{x_o}^x (-P(t))\,dt \geq 0$ γιατί $-P(t) \geq 0$

Άρα $\int_{x_o}^{x} P(t)\,dt \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

Γ48. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$

με $\lim_{x \to 1} \frac{f(x-1)}{x^2 - x} = 1$

και για την οποία ισχύει η σχέση:

$(x^2 - 2x) \cdot f'(x) \geq |e^{x-1} - 1| - f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Λύση έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν.Καζαντζής, Ε. Μήτσιου.

α) Να βρεθεί (αν υπάρχει) η εξίσωση της εφαπτομένης της στο $x_o = 0$.

β) Ν. Δ. Ο. $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$

Ε. Μήτσιου

Λύση :

α) Ονομάζουμε $x - 1 = y$. Άρα

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x-1)}{x^2 - x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{f(y)}{y(y+1)} = 1$$

Ονομάζουμε (1) $h(y) = \frac{f(y)}{y(y+1)} \Rightarrow f(y) = y(y+1)\,h(y) \quad (y \neq 0,\ y \neq -1)$

Τότε $\lim_{y \to 0} f(y) = f(0)$ γιατί f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Όμως $\lim_{y \to 0} f(y) = \lim_{y \to 0}\left[y(y+1)\,h(y)\right] = 0 \cdot (0+1) \cdot 1 = 0$ Έτσι $f(0) = 0$

Τότε $\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{f(y)}{y} \overset{(1)}{=} (y+1)\,h(y) \Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{f(y)}{y} = \lim_{y \to 0}(y+1) \lim_{y \to 0} h(y) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(0) = 1$. Άρα στο $(0, f(0) = 0)$ έχουμε εφαπτομένη την $y = x$.

β) Από την $(x^2 - 2x)\,f'(x) \geq |e^{x-1} - 1| - f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)\,f'(x) \geq |e^{x-1} - 1| \Leftrightarrow (x-1)^2 f'(x) \geq |e^{x-1} - 1|$ και $\forall x \neq 0, 1$

Έχουμε $f'(x) \geq \frac{|e^{x-1} - 1|}{(x-1)^2}$. Άρα $f'(x) \geq 0$ $\forall x \neq 0, 1$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα η f αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $\forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

Γ49. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Αν Α, Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του ίδιου δ. χώρου Ω με:

$P(A) = [f(1)]^2 - f(1) \cdot f(2) + 0{,}5$ και

$P(B) = [f(2)]^2 - f(1) \cdot f(2) + 0{,}5$ τότε:

α) Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g με

$$g(x) = \sqrt{x - 4} + 5 \text{ στο } x_o = 4$$

β) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή 2η παράγωγο και οι εφαπτομένες στα $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ σχηματίζουν με τον x'x γωνίες $\pi/4$ και $\pi/3$ αντίστοιχα, τότε

να υπολογιστεί το $\int_1^2 x\,f''(x)\,dx$

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

α) Βρίσκουμε πρώτα την εφαπτομένη της C_g στο $x_o = 4$. Είναι $A_g = [4, +\infty)$

και $\lim_{x \to 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x - 4}}{x - 4} \overset{x>4}{=} \lim_{x \to 4^+} \sqrt{\frac{x - 4}{(x - 4)^2}} = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x - 4}} = +\infty$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_o = 4$, έχει εφαπτομένη την ευθεία $x = 4$.

Τώρα επειδή A, B ασυμβίβαστα, έχουμε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = [f(1)]^2 + [f(2)]^2 - 2f(1)\,f(2) + 1 = [f(2) - f(1)]^2 + 1.$$

Όμως $\quad P(A \cup B) \le 1 \Leftrightarrow [f(2) - f(1)]^2 = 0 \Rightarrow f(2) = f(1).$

Για την f λοιπόν ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θ. Rolle στο [1, 2] οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ (ένα τουλάχιστον) : $f''(\xi) = 0$. Η εφαπτομένη λοιπόν της C_f στο ξ ως παράλληλη του άξονα των x είναι κάθετη στην $x = 4$.

β) Είναι $f(1) = f(2)$, $f'(1) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$ και $f'(2) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Άρα

$$\int_1^2 x\, f''(x)\, dx = \left[x\, f'(x)\right]_1^2 - \int_1^2 f'(x)\, dx = \left[x\, f'(x)\right]_1^2 - \left[f(x)\right]_1^2 =$$

$$= 2f'(2) - 1f'(1) - \left(f(2) - f(1)\right) = 2\sqrt{3} - 1 \cdot 1 - \left(f(1) - f(1)\right) = 2\sqrt{3} - 1$$

Γ50. Σημείο M(x, y) κινείται στο επίπεδο

124 Oxy ώστε οι ρυθμοί μεταβολής των x, y ως προς το χρόνο t να είναι αντίστοιχα

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t} \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t} \quad t \ge 0$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι M(0, 2).

α) Να δειχτεί ότι το M διαγράφει ένα τόξο υπερβολής C.

β) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία $y = e + \frac{1}{e}$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C στο M με τον x'x.

γ) Να υπολογιστεί το $\int_0^1 \varepsilon\varphi\theta\, dt$

δ) Να δειχτεί ότι η ευθεία $y = x \cdot \lim_{t \to +\infty} \varepsilon\varphi\theta$ είναι ασύμπτωτη της C.

Κ. Ζερβός

Όπως θα πρόσεξαν όσοι αναγνώστες ασχολήθηκαν με τις ασκήσεις της Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, υπάρχουν δύο ασκήσεις με την αρίθμηση Γ50. Η πρώτη βρίσκεται στη σελίδα 124 και γι' αυτό χαρακτηρίζεται με

Γ50. 124 και η άλλη στη σελίδα 125 **Γ50. 125**

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης.

Λύση :

α) Είναι $\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}$ και

$\frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}, \quad t \ge 0$

Η θέση του M καθορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$x = x(t)$, $y = y(t)$ για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις.

Έτσι αφού $\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t} = \frac{d\left(e^t - e^{-t}\right)}{dt} \Rightarrow x = e^t - e^{-t} + c$ και επειδή για $t = 0$

είναι $x = 0$ (το M(0, 2)), $\Rightarrow c = 0$

Επειδή $\frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t} = \frac{d\left(e^t + e^{-t}\right)}{dt} \Rightarrow y = e^t + e^{-t} + c_1$ και για $t = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow c_1 = 0$

Ώστε $\quad x = e^t - e^{-t} \quad (1)$

και $\quad y = e^t + e^{-t} \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε $x + y = 2e^t$ και $y - x = 2e^{-t} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + y)(y - x) = 2e^t 2e^{-t} = 4.$

Έτσι το M(x, y) κινείται στην υπερβολή C: $(x + y)(y - x) = 4 \Leftrightarrow$

$$y^2 - x^2 = 4 \quad (3)$$

με $x \ge 0$ και $y > 0$ αφού για $t \ge 0$ είναι $x \ge 0$ και $y > 0$.

β) Η εφαπτομένη της C στο σημείο $M(x_o, y_o)$ της (C) έχει εξίσωση $yy_1 - xx_1 = 4$

και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \varepsilon\varphi\theta = \frac{x_o}{y_o}$. Δηλαδή

$$\varepsilon\varphi\theta(t) = \lambda(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \Rightarrow \lambda'(t) = \frac{\left(e^t + e^{-t}\right)\left(e^t + e^{-t}\right) - \left(e^t - e^{-t}\right)\left(e^t - e^{-t}\right)}{\left(e^t + e^{-t}\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{\left(e^t + e^{-t}\right)^2}$$

Άρα $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)' = \lambda'(t) \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \frac{d\theta}{dt} = \frac{4}{\left(e^t + e^{-t}\right)^2} \quad (4)$

Τη χρονική στιγμή t_o είναι $y_o = e + \frac{1}{e} = e + e^{-1}$. Αλλά $y_o = e^t + e^{-t}$.

Έτσι πρέπει $e^t + e^{-t} = e + e^{-1} \Leftrightarrow e^t + \frac{1}{e^t} = e + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \left(e^t\right)^2 - \left(e + \frac{1}{e}\right)e^t + 1 = 0$

απ' όπου προκύπτει $e^t = e$ ή $e^t = e^{-1} \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = -1$.

Επειδή $t \ge 0 \Rightarrow \boxed{t_o = 1}$

Άρα για $t = 1$ είναι $\varepsilon\varphi\theta(1) = \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(1)} = 1 + \varepsilon\varphi^2\theta(1) = 1 + \left(\frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}\right)^2 =$

$$= \frac{\left(e+e^{-1}\right)^2 + \left(e-e^{-1}\right)^2}{\left(e+e^{-1}\right)^2} = \frac{2\left(e^2+e^{-2}\right)}{\left(e+e^{-1}\right)^2}$$

Τότε η (4) γίνεται $\left(1+\epsilon\varphi^2\theta(1)\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t_0=1} = \frac{4}{\left(e+e^{-1}\right)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2\left(e^2+e^{-2}\right)}{\left(e+e^{-1}\right)^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t_0=1} = \frac{4}{\left(e+e^{-1}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t_0=1} = \frac{2}{e^2+e^{-2}}\ \frac{rad}{sec} \qquad (5)$$

γ) Είναι $\int_0^1 \epsilon\varphi\theta\, dt = \int_0^1 \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt = \int_0^1 \frac{\left(e^t+e^{-t}\right)'}{\left(e^t+e^{-t}\right)}dt = \left[\ln\left(e^t+e^{-t}\right)\right]_0^1 =$

$$= \ln\left(e+e^{-1}\right) - \ln\left(e^0+e^0\right) = \ln\left(e+e^{-1}\right) - \ln 2 = \ln\frac{e+e^{-1}}{2}$$

δ) Είναι $\lim_{t\to+\infty} \epsilon\varphi\theta = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}\left(1-\frac{1}{e^{2t}}\right)}{e^{2t}\left(1+\frac{1}{e^{2t}}\right)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2t}}}{1+\frac{1}{e^{2t}}} =$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad \text{αφού} \quad \lim_{t\to+\infty} e^{2t} = +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{2t}} = 0$$

Έτσι η ευθεία: $y = x\lim_{x\to+\infty}\epsilon\varphi\theta$ είναι η $y = x$ που είναι ασύμπτωτη της ισοσκελούς υπερβολής $y^2 - x^2 = 4$

Γ50. Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = e^{2x}f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

125

Ν. Ζανταρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Ζανταρίδης, Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ο. Μοσχίδης.

Λύση 1η :

Αφού η f παραγωγίσιμη ⇒ f(- x) παραγωγίσιμη (σύνθεση) και επειδή

$$f'(x) = e^{2x}f(-x) \qquad (1)$$

η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχει η f'' στο $\mathbb{R}$ και από την

$$f'(x) = e^{2x}f(-x) \Rightarrow f''(x) = 2e^{2x}f(-x) - e^{2x}f'(-x) \overset{(1)}{=}$$

$$= 2e^{2x}f(-x) - e^{2x}\left(e^{-2x}f(x)\right) = 2e^{2x}f(-x) - f(x) \overset{(1)}{=} 2f'(x) - f(x)$$

Ώστε $f''(x) = 2f'(x) - f(x) \Rightarrow f''(x) - f'(x) = f'(x) - f(x) \Rightarrow (f'(x) - f(x))' = (f'(x) - f(x)) \Rightarrow$

$$f'(x) - f(x) = ce^x \qquad (2)$$

Για $x = 0$ η (2) δίνει $f'(0) - f(0) = ce^0 = c$.

Η (1) για $x = 0$ δίνει $f'(0) = f(0) \Rightarrow c = 0$.

Άρα $f'(x) = f(x)\quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = c_1e^x$ (3)

Για $x = 0$ $f(0) = c_1 \Rightarrow 1 = c_1 \Rightarrow f(x) = e^x$ (4)

Υποθέσαμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που πληρεί την (1) και βρήκαμε ότι αυτή είναι η $f(x) = e^x$. Η ευρεθείσα επαληθεύει την (1)

Λύση 2η :

Δίνεται ότι από την (1) $f'(x) = e^{2x}f(-x) \Leftrightarrow$

$$f'(x)e^{-x} = e^x f(-x) \qquad (2)$$

Βάζοντας στην (2) όπου x το - x παίρνουμε $f'(-x)e^x = e^{-x}f(x)$ (3)

Με αφαίρεση των (2) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$f'(x)e^{-x} - f'(-x)e^x = e^xf(-x) - e^{-x}f(x) \Rightarrow [f(x)e^{-x}]' = [e^xf(-x)]' \Leftrightarrow$

$$f(x)e^{-x} - e^xf(-x) = c_1 \qquad (4)$$

Για $x = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Λόγω της (2) η (4) γίνεται:

$$f(x)e^{-x} = f'(x)e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c_2e^x \qquad (5)$$

και για $x = 0$ η (5) δίνει $f(0) = c_2e^0 = c_2 = 1 \Rightarrow f(x) = e^x$ κ.λ.π.

Γ51. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \int_{\ln 2}^{1}\frac{e^{xt}-1}{t}dt.$$

Να μελετηθεί ως προς την παραγωγισιμότητα και τη μονοτονία.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Ε. Μήτσιου, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Έχουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_{\ln 2}^{1}\frac{e^{xt}-1}{t}dt \qquad (1)$$

Ονομάζουμε $xt = u$ (2)

Τότε $xdt = du$ και για $t = 1 \Rightarrow u = x$ ενώ για $t = \ln 2 \Rightarrow u = (\ln 2)x$.

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_{(\ln 2)x}^{x}\frac{e^u-1}{\frac{u}{x}}\cdot\frac{du}{x} = \int_{(\ln 2)x}^{x}\frac{e^u-1}{u}du = \int_{(\ln 2)x}^{0}\frac{e^u-1}{u}du + \int_0^x\frac{e^u-1}{u}du \Rightarrow$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^u - 1}{u}\,du - \int_0^{(\ln 2)x} \frac{e^u - 1}{u}\,du \qquad (3)$$

Επειδή η $g(u) = \frac{e^u - 1}{u}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ τότε και οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^u - 1}{u}\,du$, $\int_0^{(\ln 2)x} \frac{e^u - 1}{u}\,du$ είναι παραγωγίσιμες στα $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 0)$

Στο $x_o = 0$ είναι $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\left(\int_0^x \frac{e^u - 1}{u}\,du - \int_0^{(\ln 2)x} \frac{e^u - 1}{u}\,du\right) - 0}{x - 0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \left(\frac{e^{x\ln 2} - 1}{x\ln 2}\right)\ln 2}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x\ln 2} - 1}{x}}{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x\ln 2} - 1}{x}\right) = 1 - \ln 2$$

διότι $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^o = 1,$

ενώ $\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^{x\ln 2} - 1}{x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x\ln 2} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{e^{x\ln 2} \cdot \ln 2}{1}\right) = \ln 2$

Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Τώρα είναι $f'(x) = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x\ln 2} - 1}{x\ln 2}(x\ln 2)' = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x\ln 2} - 1}{x} = \left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right)$

$$= \frac{e^x - e^{x\ln 2}}{x} = \frac{e^x\left(1 - e^{x\ln 2 - x}\right)}{x} = \frac{e^x\left(1 - e^{x(\ln 2 - 1)}\right)}{x} \qquad (4)$$

Είναι $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$. Επειδή $\ln 2 - 1 = \ln 2 - \ln e < 0$. Άρα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^{x(\ln 2 - 1)}$	-	‖	+
x	-	‖	+
f'(x)	+ ↗	‖	+ ↗

Γ52 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [1, α] με f(1) = α και f(α) = 2α + 1. Να βρεθεί για ποιες τιμές του α ισχύει

$$1 \le f'(x) \le 2, \text{ με } x \in (1, \alpha).$$

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Ε. Μήτσιου, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Αφού η f παραγωγίσιμη στο [1, α] (είναι αυτονόητο ότι α > 1 οπότε 2α + 1 > 3), πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης Τιμής:

$$\exists\, \xi \in (1, \alpha):\ f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(1)}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha + 1 - \alpha}{\alpha - 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$$

Θέλουμε $1 \le f'(x) \le 2 \ \forall x \in (1, \alpha)$ οπότε και για $x = \xi \in (1, \alpha)$

Έτσι $1 \le \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - 1 \ge 0$ και $\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - 2 \le 0 \Leftrightarrow$

$\frac{2}{\alpha - 1} \ge 0$ και $\frac{-\alpha + 3}{\alpha - 1} \le 0$ και επειδή $\alpha - 1 > 0 \Rightarrow -\alpha + 3 \le 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha \ge 3}$

Γ53. Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - 1}{x} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt, & \text{αν } x > 0 \\ \lim_{t \to +\infty} \frac{(x^2 + 1)t^2 + 1}{t^2 + t + 1}, & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$$

α) Να δειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να δειχτεί ότι

$$\int_1^e \left(f(x) + \ln x\, g(x)\right) dx = \int_1^e g(x)\,dx$$

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

α) Είναι $\lim_{t \to +\infty} \frac{(x^2 + 1)t^2 + 1}{t^2 + t + 1} =$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{(x^2 + 1)t^2}{t^2} = x^2 + 1$$

Άρα η f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt, & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \le 0 \end{cases}$$

Η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = 2x$ και για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x g(t)\,dt + \frac{1}{x}g(x) = \frac{xg(x) - \int_0^x g(t)\,dt}{x^2}$$

Είναι $f(0) = 1$ και δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x} = 0$. Αν ονομάσουμε:

$h(x) = \frac{g(x)-1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ οπότε $g(x) = xh(x) + 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \cdot 1 + 1 = 1$ και αφού g συνεχής $\Rightarrow g(0) = 1$.

Τότε: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(x^2+1)-1}{x-0} = \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

ενώ $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{x}\int_0^1 g(x)\,dt - 1}{x-0} = \frac{\int_0^1 g(t)\,dt - x}{x^2}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^1 g(t)\,dt - x\right)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-1}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\underset{g' \text{ συνεχής}}{\overset{g \text{ παραγ.}}{=\!=\!=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{(g(x)-1)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{g'(x)}{2} = \frac{1}{2}g'(0)$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x} = 0$ (δίνεται) $\Rightarrow g'(0) = 0$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$. Ώστε $f'(0) = 0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού $x \in [1, e] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt$.

Άρα $\int_1^e \left(f(x) + \ln x\, g(x)\right)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt + \ln x\, g(x)\right)dx =$

$$= \int_1^e \left[(\ln x)'\int_0^x g(t)\,dt + \ln x\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)'\right]dx = \int_1^e \left[\ln x\int_0^x g(t)\,dt\right]'dx =$$

$$= \left[\ln x\int_0^x g(t)\,dt\right]_1^e = \ln e\int_0^e g(t)\,dt - \ln 1\int_0^1 g(t)\,dt = 1\cdot\int_0^e g(t)dt - 0\int_0^1 g(t)\,dt =$$

$$= \int_0^e g(t)\,dt$$

Γ54. Να λυθεί η ανίσωση:

$(3^x + 4^x)^3 - 5^x > 125^x - 3^x - 4^x$

Κ. Γκατζούλης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$(3^x + 4^x) - (5^x)^3 > 5^x - 3^x - 4^x \Leftrightarrow (3^x + 4^x)^3 - (5^x)^3 + (3^x + 4^x - 5^x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3^x + 4^x - 5^x)\left[(3^x + 4^x)^2 + (3^x + 4^x)\cdot 5^x + (5^x)^2\right] + (3^x + 4^x - 5^x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3^x + 4^x - 5^x)\Big[\underbrace{(3^x + 4^x) + (3^x + 4^x)5^x + 5^{2x} + 1}_{\text{θετικό}}\Big] > 0 \Leftrightarrow 3^x + 4^x - 5^x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 > 0 \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$

Είναι $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0$ $\left(\text{αφού } \ln\frac{3}{5} < 0,\ \ln\frac{4}{5} < 0\right)$

έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα:

Αν $x < 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 0$

ενώ $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(2) = 0$

Έτσι η ανίσωση αληθεύει για $\mathbf{x < 2}$.

Γ55. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχής στο $\mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $g(0) = 1$ και $f(x)\,g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) + g(x)$ έχει κρίσιμο σημείο.

Κ. Γκατζούλης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

Δίνεται ότι

$f(x) > 0,\ g(x) > 0$ (1)

$\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x)\,g(x) = 1$ (2)

$\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$ (3)

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι και $g(0) = 1$ (4)

Ονομάζουμε $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τη συνάρτηση $f + g$ δηλαδή: $h(x) = f(x) + g(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Τότε $h(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2$ και $h(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2 \quad * \ \forall x \in \mathbb{R}$

Άρα για τη **συνεχή** στο IR συνάρτηση h ισχύει:

$$h(x) \geq h(0) = 2 \qquad (5)$$

(και το O είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(-\infty, +\infty)$)

Άρα
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0 \overset{Fermat}{\Rightarrow} f'(0) = 0$, οπότε το O στάσιμο σημείο.
- Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ (ενώ είναι συνεχής) πάλι το $x_o = 0$ είναι κρίσιμο σημείο.

* Είναι γνωστό ότι $\forall \alpha > 0$ ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

Γ56. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$$

Κ. Αβραμίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. Κατσάς, Ο. Μοσχίδης.

Λύση :

Έχουμε $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

Θέτουμε $x = -u \Rightarrow dx = -du$ και για $x_1 = -1 \Rightarrow u_1 = 1$

για $x_2 = 1 \Rightarrow u_2 = -1$

$$\text{Άρα} \quad I = \int_{1}^{-1} \frac{-du}{(e^{-u}+1)(u^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\left(\frac{1}{e^u}+1\right)(u^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{e^u\,du}{(e^u+1)(u^2+1)} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(e^u+1-1)\,du}{(e^u+1)(u^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{u^2+1} - \int_{-1}^{1} \frac{du}{(e^u+1)(u^2+1)} \Rightarrow$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{du}{u^2+1} - I \Leftrightarrow 2I = \int_{-1}^{1} \frac{du}{u^2+1} \qquad (1)$$

Ονομάζουμε $u = \varepsilon\varphi t \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt,\quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

(Νέα όρια τα $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ αφού $u = -1 \Rightarrow \varepsilon\varphi t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4}$ κ.λ.π.)

$$\text{Έτσι} \quad \int_{-1}^{1} \frac{du}{u^2+1} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}\,\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1 \cdot dt = [t]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Έτσι $2I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$

Γ57. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $(0, +\infty)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\ln t \leq f(t) \leq t - 1$ για κάθε $t > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(1) = 1$

ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\int_1^x f(t)\,dt + x^2 + 1 - 2e^{x-1}}{(x-1)^2} = 1$

iii) Η εξίσωση $2 + 2\int_1^x f(t)\,dt = 2\ln x + x^2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1, e)$

Κ. Γκατζούλης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Απόδειξη:

i) Δίνεται ότι

$$\ln t \leq f(t) \leq t - 1 \quad \forall t > 0 \qquad (1)$$

Για $t = 1$ η (1) γίνεται

$\ln 1 \leq f(1) \leq 1 - 1 \Rightarrow 0 \leq f(1) \leq 0 \Rightarrow f(1) = 0$

Τότε η (1) για $t > 1$ γίνεται:

$$\frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{f(t) - f(1)}{t-1} \leq 1 \qquad (2)$$

και για $t < 1$ γίνεται:

$$1 \leq \frac{f(t) - f(1)}{t-1} \leq \frac{\ln t}{t-1} \qquad (2)'$$

$$\text{Επειδή} \quad \lim_{t \to 1} \frac{(\ln t)'}{(t-1)'} = \lim_{t \to 1} \frac{\frac{1}{t}}{1} = \lim_{t \to 1} \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow \lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1 \Rightarrow \lim_{t \to 1^-} \left(\frac{\ln t}{t-1}\right) =$$

$$= \lim_{t \to 1^+} \left(\frac{\ln t}{t-1}\right) = 1.$$

Άρα λόγω των (2) και 2′ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{t \to 1} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = 1 \Rightarrow f'(1) = 1$$

ii) Επειδή έχουμε αοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$ αναζητούμε το (De L' Hospital)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\left[2\int_1^x f(t)\,dt + x^2 + 1 - 2e^{x-1}\right]'}{\left[(x-2)^2\right]'} = \lim_{x \to 1} \frac{2f(x) + 2x - 2e^{x-1}}{2(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{x-1}+\frac{x-e^{x-1}}{x-1}\right] \qquad (3)$$

Όμως $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$ ενώ για το $\lim_{x\to 1}\frac{x-e^{x-1}}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-e^{x-1}\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{x-1}}{1}=0\Rightarrow\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{x-1}+\frac{x-e^{x-1}}{x-1}\right]=1+0=1$$

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση g: [1, e] → IR με $g(x)=2+2\int_1^x f(t)\,dt-2\ln x-x^2$

Είναι $g(1)=1>0$

$g(e)=2\int_1^e f(t)\,dt-e^2$. Λόγω της (1) $f(t)\le t-1\Rightarrow\int_1^e f(t)\,dt\le 2\int_1^e (t-1)\,dt\Rightarrow$

$$2\int_1^e f(t)\,dt\le 2\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^e=2\left[\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]=e^2-2e+1$$

Άρα $g(e)=2\int_1^e f(t)\,dt-e^2\le -2e+1=1-2e<0$

Ώστε $g(1)\,g(e)<0$ οπότε η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1, e) (Bolzano)

Είναι τώρα $g'(x)=2f(x)-\frac{2}{x}-2x=2\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]\overset{*}{\le}2\left[f(x)-2\right]\le 2\left[x-1-2\right]=$

$$=2(x-3)<0\quad\forall x\in(1,e)$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα και η ρίζα μοναδική.

* Είναι $x+\frac{1}{x}\ge 2\quad\forall x>0$ και $f(x)\le x-1$ από 1.

Γ58. Η συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to$ IR είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\int_0^x(\eta\mu t)f(t)\,dt=f'(x)\eta\mu x-f(x)\,\sigma\upsilon\nu x+f(0)$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f'(x) είναι σταθερή στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Κ. Γκατζούλης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ- Ν Ιωσηφίδης.

Απόδειξη:

Δίνεται ότι: $\int_0^x(\eta\mu t)f(t)\,dt=f'(x)\,\eta\mu x-f(x)\,\sigma\upsilon\nu x+f(0)$ (1)

Παραγωγίζουμε και έχουμε:

$\eta\mu x f(x)=f''(x)\,\eta\mu x+f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x+f(x)\,\eta\mu x\Leftrightarrow f''(x)\eta\mu x=0\Leftrightarrow f''(x)=0$

$$\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}\quad \Omega\sigma\tau\varepsilon\ f'(x)=\begin{cases}c_1 & x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\\ f'(0) & x=0\\ c_2 & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, θα είναι η f' συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=f'(0)\Rightarrow c_1=c_2=f'(0)$

Άρα $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)=c_1$

Γ59. Δίνεται η f: IR → IR, συνεχής στο IR, για την οποία ισχύει ότι

$$|f(x)-x+2|\le\frac{2\cdot|x|}{x^2+1}\qquad(1)$$

για κάθε x ∈ IR.

α) Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x\to+\infty$.

β) Έστω Ε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, την ασύμπτωτή της στο +∞ και τις ευθείες x = 0, x = 1.

Να δειχτεί ότι $E\le\ln 2$

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

α) Επειδή $x\to+\infty$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot|x|}{x^2+1}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Τότε λόγω της (1) είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=0$$

οπότε η ευθεία y = x - 2 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f για $x\to+\infty$

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^1\left|f(x)-(x-2)\right|dx\overset{(1)}{\le}\int_0^1\frac{2|x|}{x^2+1}dx\overset{0\le x\le 1}{=}$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}dx = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$ Άρα $\mathbf{E \leq \ln 2}$

Γ60. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

i) $f(0) = 0$

ii) f' συνεχής στο $x_o = 0$.

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$

Αν $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \ x \geq 0$

να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1}{x}F(x) < F'(x)$ για κάθε $x > 0$

β) Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

γ) Είναι η $g'(x)$ συνεχής στο $x_o = 0$;

Κ. Γκατζούλης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

α) Είναι $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [0, +\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $h(x) = F(x) - xF'(x) = F(x) - xf(x)$. Είναι

$h'(x) = F'(x) - (F'(x) + xF''(x)) =$

$= -xF''(x) = -xf'(x) < 0$

$\forall x > 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Επομένως:

$x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0) \Rightarrow$

$$F(x) - xF'(x) < F(0) - 0F'(0) \ \text{ή}\ F(x) - xF'(x) < 0 \Rightarrow F(x) < xF'(x) \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{x}F(x) < F'(x) \qquad (1)$$

β) Είναι $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{F(x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και για $x > 0$ είναι

$$g'(x) = \frac{xF'(x) - F(x)}{x^2} > 0 \text{ λόγω της (1).}$$

Η g είναι συνεχής στο $x_o = 0$ αφού $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{F(x)}{x}\right] \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(F(x))'}{(x)'} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

αφού η f είναι συνεχής στο 0. Έτσι $g(0) = 0$.

Έτσι $g'(x) > 0 \ \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$ g γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

γ) Είναι $$g'(x) = \frac{xF'(x) - F(x)}{x^2}, \quad \forall x > 0 \qquad (2)$$

Στο $x_o = 0$, ζητούμε $\lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt - 0}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}f'(0) \in \mathbb{R}$$

(αφού η f παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$)

Ώστε $$g'(0) = \frac{1}{2}f'(0) \qquad (3)$$

Τώρα προκειμένου να εξετάσουμε αν η g' είναι συνεχής στο $x_o = 0$ αναζητούμε το

$$\lim_{x\to 0} g'(x) \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{xF'(x) - F(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(xf(x) - F(x))'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) + xf'(x) - F'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) + xf'(x) - f(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}f'(0) \qquad (4)$$

αφού η f' συνεχής στο $x_o = 0$.

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι η g' είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

Γ61. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x \cdot f(x) = x^2 - \eta\mu x \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Κ. Ζερβός

Λύσεις έστειλαν οι: Κ. Ζερβός, Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

α) Η (1) για $x \neq 0$ γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - \eta\mu x}{x} = x - \frac{\eta\mu x}{x}$$

και επειδή

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0 - 1 = -1$$

και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο

$$x_o = 0 \Rightarrow f(0) = -1 \ \left(\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)\right)$$

Τώρα είναι: f συνεχής στο $[0, \pi]$ και $f(0)\,f(\pi) = (-1)\left(\pi - \frac{\eta\mu\pi}{\pi}\right) = (-1)\pi = -\pi < 0$

Άρα από το Θ. Bolzano $\exists\, \xi \in (0, \pi): f(\xi) = 0$

β) Από την $f(x) = x - \frac{\eta\mu x}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε $f'(x) = 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x}{x^2}$

Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

Είναι για $x \neq 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - \frac{\eta\mu x}{x} - (-1)}{x} = \frac{x^2 - \eta\mu x + x}{x^2}$ και επειδή κατά τη

λήψη του $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ έχουμε $\left(\frac{0}{0}\right)$, αναζητούμε το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(x^2 - \eta\mu x + x\right)'}{\left(x^2\right)'} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{2x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2 + \eta\mu x}{2} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\text{Άρα} \quad f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

γ) Η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες (συνεχής στο $\mathbb{R}$). Αν $y = \lambda x + \mu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη για $x \to \pm\infty$ θα είναι

$$\lambda = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - \frac{\eta\mu x}{x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\text{αφού} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \ (***) \Rightarrow \lambda = 1$$

Τότε $\mu = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \lambda x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x - \frac{\eta\mu x}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0.$

Άρα η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f για $x \to +\infty$ και για $x \to -\infty$.

*** Το ότι $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ δε χρειάζεται να το αποδεικνύουμε κάθε φορά. Είναι λυμένη εφαρμογή στη § 42 του βιβλίου ΑΝΑΛΥΣΗ του Ο.Ε.Δ.Β. (Σχολικό).

Γ62. Να αποδειχθεί ότι αν f(x) είναι συνεχής $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ικανοποιεί την ταυτότητα:

$$f(f(f(x))) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) = x.$$

Κ. Αβραμίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης.

Λύση :

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι είναι «1 - 1».

Πράγματι αν για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow f(f(f(x_1))) = f(f(f(x_2))) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(f(f(x))) = x$. Άρα η f είναι «1 - 1».

Τώρα η f είναι «1 - 1» και συνεχής. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε αν

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow f(f(f(x_1))) > f(f(f(x_2))) \Rightarrow x_1 > x_2$ άτοπο.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν τώρα για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ δεν είναι $f(x_o) = x_o$ τότε

- αν $f(x_o) > x_o \Rightarrow f(f(x_o)) > f(x_o) > x_o \Rightarrow f(f(f(x_o))) > f(x_o) \Rightarrow x_o > f(x_o)$. Άτοπο.
- Αν $f(x_o) < x_o$ προκύπτει $x_o < f(x_o)$. Άτοπο. Άρα $f(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

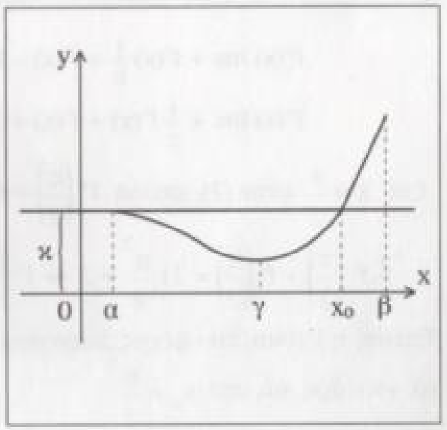
ΣΧΟΛΙΟ

Η αληθής πρόταση: «Αν η f είναι 1 - 1 σε ένα διάστημα Δ και συνεχής σ' αυτό τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ» δεν υπάρχει στο Σχολικό Βιβλίο Ανάλυσης. Θεωρούμε σκόπιμο να αναφέρουμε την απόδειξή της.

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε δύο <u>τυχαία</u> $\alpha, \beta \in \Delta$ με π.χ. $\alpha < \beta$.

Τότε αφού η f είναι 1 - 1 δεν μπορεί να είναι $f(\alpha) = f(\beta)$ γιατί τότε θα ήταν $\alpha = \beta$ (Άτοπο). Άρα θα είναι $f(\alpha) \neq f(\beta)$.



- Ας είναι $f(\alpha) < f(\beta)$. Θα αποδείξουμε ότι $\forall \gamma \in (\alpha, \beta)$ θα είναι

$$f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta).$$

Ας υποθέσουμε ότι $\exists\, \gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\gamma) \notin (f(\alpha), f(\beta))$ και ας υποθέσουμε ότι:

i) $f(\alpha) > f(\gamma)$ και $f(\gamma) < f(\beta)$.

Τότε για τη συνεχή στο $[\gamma, \beta]$ συνάρτηση f, υπάρχει

$x_o \in (\gamma, \beta)$: $f(x_o) = f(\alpha)$.

(Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών με $K > f(\alpha) \in (f(\gamma), f(\beta))$.

Άτοπο αφού η f είναι 1 - 1.

ii) $f(\alpha) < f(\gamma)$ και $f(\gamma) > f(\beta)$. Τότε $\exists\, x_o \in (\alpha, \gamma)$: $f(x_o) = f(\beta)$

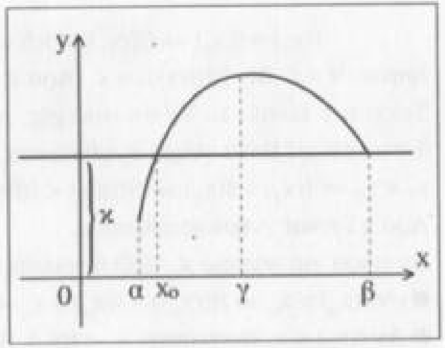
(Θ. ενδιάμεσων τιμών με $K = f(\beta) \in (f(\alpha), f(\gamma))$.

Άτοπο πάλι. Άρα, υποθέτοντας ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ δεν υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$

για το οποίο να μην ισχύει η

$f(\alpha) < f(x_o) < f(\beta)$

οπότε η f γνησίως αύξουσα.



● Αν f(α) > f(β) με παρόμοιο τρόπο. (Δείτε και: Θ.Ν.Καζαντζή: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟΝ ΤΥΠΟΕΚΔΟΤΙΚΗ ΘΕΣ/ ΝΙΚΗ 1979. Πρόβλημα 120 σελ. 240).

Γ63. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη για x > 0 τέτοια ώστε

$$f'(x)\cdot \ln x + f(x) - συν^3x = 7x^3 + 2x$$

∀ x > 0. Αν π/ 2 είναι ρίζα της f''(x) Ν.δ.ο. υπάρχει διάστημα στο οποίο η f είναι αυστηρά αύξουσα.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς.

Λύση :

Δίνεται ότι: Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση για x > 0 και

$$f'(x)\cdot \ln x + f(x) - συν^3x = 7x^3 + 2x \quad (1)$$

∀ x > 0. Με παραγώγιση και των δύο μελών της (1) παίρνουμε:

$$f''(x)\ln x + f'(x)\frac{1}{x} + f'(x) - 3συν^2x\,(συνx)' = 21x^2 + 2 \Rightarrow$$

$$f''(x)\ln x + \frac{1}{x}f'(x) + f'(x) + 3συν^2x\,ημx = 21x^2 + 2 \quad (2)$$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ στην (2), επειδή $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ θα έχουμε:

$$\frac{2}{\pi}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 21\frac{\pi^2}{4} + 2 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi+2}{\pi}\right) = 21\frac{\pi^2}{4} + 2 \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \quad (3)$$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0, +∞), θα είναι η f' συνεχής στο (0, +∞), άρα και στο $x_o = \frac{\pi}{2}$.

Έτσι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f'(x) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$: $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \delta\right)$ να είναι f'(x) > 0.

Ώστε στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(ή\ στο \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta\right)\right)$ είναι f'(x) > 0 οπότε η f γνησίως αύξουσα σ' αυτό.

Γ64. Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 σχηματίζουμε 9 - ψήφιο αριθμό.

α) Ποια είναι η πιθανότητα στον αριθμό να προηγείται το 6 του 2.

β) Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε τα ψηφία του αριθμού αυτού που ισαπέχουν από τα άκρα, να έχουν άθροισμα 10.

γ) Ποια είναι η πιθανότητα να προηγείται το 6 του 2, όταν τα ψηφία του αριθμού που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν άθροισμα 10.

Θ.Ν.Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Θ. Ν. Καζαντζής.

Λύση :

Έχουμε τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και σχηματίζουμε όλους τους 9 - ψήφιους αριθμούς. (N(Ω) = 9!)

α) Έστω ότι το 6 προηγείται του 2 (σε μια συγκεκριμένη μετάθεση S)

S: . . . 6 . . . 2 . . .

S′: . . . 2 . . . 6 . . .

π.χ. S: 74 **6** 31 **2** 589

S′: 74 **2** 31 **6** 589

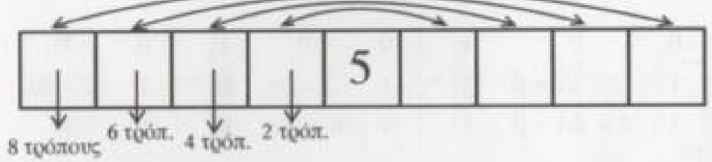
Υπάρχει ακριβώς μια μετάθεση S′, όπου το 2 προηγείται του 6, με τα υπόλοιπα ψηφία στις ίδιες θέσεις.

Αυτές λοιπόν οι μεταθέσεις (9 - ψήφιοι αριθμοί) στις οποίες το 6 προηγείται του 2 είναι τόσες όσες και οι υπόλοιπες στις οποίες το 2 προηγείται του 6, άρα οι μισές.

Επομένως $P(A) = \frac{1}{2}$. (Α ονομάσαμε το ενδεχόμενο: Το 6 προηγείται του 2).

β) Το μεσαίο στοιχείο υποχρεωτικά θα είναι το 5.

Στην πρώτη θέση θα είναι ένα από τα υπόλοιπα 8 ψηφία. Με την εκλογή του πρώτου ψηφίου (με 8 τρόπους) αυτομάτως καθορίζεται το τελευταίο (π.χ. πρώτο ψηφίο το 3 τελευταίο ψηφίο το 7)



Έτσι για τη δεύτερη θέση εκλέγεται ένα από τα υπόλοιπα 6 (με 6 τρόπους) για την τρίτη θέση ένα από τα υπόλοιπα 4 και για την τέταρτη θέση ένα από τα υπόλοιπα 2. Άρα 8 · 6 · 4 · 2 είναι οι αριθμοί του ενδεχομένου οπότε

$$P(B) = \frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9!} = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$$

(Β ονομάσαμε το ενδεχόμενο: Το άθροισμα των ψηφίων που ισαπέχουν απ' τα άκρα είναι 10)

γ) Το πλήθος των αριθμών (9 ψήφιων) που το άθροισμα των ψηφίων που ισαπέχουν απ' τα άκρα είναι 10, είδαμε ότι είναι $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$.

Για τον καθένα απ' αυτούς στον οποίο το 6 προηγείται του 2 υπάρχει ένας στον οποίο το 2 προηγείται του 6. Επομένως το πλήθος των 9 ψήφιων αριθμών που έχουν και τις δύο ιδιότητες είναι

$$N(A \cap B) = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{2} = 8 \cdot 6 \cdot 4$$

Άρα $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{8 \cdot 6 \cdot 4}{9!} = \dfrac{1}{2} P(B)$

Γ65. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^4 + 4x^3 + 2\alpha x + \beta$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f και το σημείο με τετμημένη $x_o = 1$ σχηματίζουν τρίγωνο του οποίου να βρείτε το εμβαδό. Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του β ώστε το σημείο G(0, - 2) να είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου.

Δ. Γεωργακίλας

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 8x^3 + 12x^2 + 2\alpha$ και $f''(x) = 24x^2 + 24x = 24x(x + 1)$. Προφανώς $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$. Έτσι τα σημεία καμπής είναι τα $(0, \beta)$ και $(-1, -2 - 2\alpha + \beta)$, ενώ το σημείο με τετμημένη $x = 1$ είναι το $(1, 6 + 2\alpha + \beta)$ και

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \beta & 1 \\ -1 & -2-2\alpha+\beta & 1 \\ 1 & 6+2\alpha+\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta & 1 \\ -1 & -2-2\alpha & 0 \\ 1 & 6+2\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta & 1 \\ -1 & -2-2\alpha & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2\alpha-2\alpha \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0. \text{ Άρα } E = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}|-4| = 2.$$

Αφού $D \neq 0$ τα προηγούμενα σημεία δεν είναι συνευθειακά οπότε σχηματίζουν τρίγωνο με κέντρο βάρους $G(g_1, g_2)$, όπου

$$g_1 = \frac{0 + (-1) + 1}{3} = 0 \quad \text{και} \quad g_2 = \frac{\beta + (-2 - 2\alpha + \beta) + (6 + 2\alpha + \beta)}{3} = \frac{3\beta + 4}{3}$$

Πρέπει το G να είναι το G(0, - 2), άρα πρέπει $\dfrac{3\beta + 4}{3} = -2 \Leftrightarrow$ $\boxed{\beta = -\dfrac{10}{3}}$

ΣΧΟΛΙΟ

Δίνεται στην υπόθεση ότι $f(x) \geq f(1)$ γεγονός που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 1$ οπότε $f'(1) = 0$ (Fermat) δηλ.

$$8 + 12 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -10}$$

Η παραπάνω όμως άσκηση δεν απαιτεί το προσδιορισμό του α.

Γ66. Δίνεται η συνάρτηση f με f' συνεχή στο [0, 1] για την οποία ισχύουν $f'(0) = f(1) = 2$ και έστω

$$F(x) = \int_0^{\eta\mu x} f(t)\,dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $F''(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (0, \pi/2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $F'(x)$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

Δ. Γεωργακίλας

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν. Καζαντζής, Ν. Κατσάς.

Λύση :

α) Η f είναι συνεχής στο [0, 1] και η ημx παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με ημ$x \in [0, 1]$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $F'(x) = f(\eta\mu x)(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x\, f(\eta\mu x)$.

(Η F είναι σύνθεση των ημx και $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$)

Η F' είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ αφού η ημx παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και f παραγωγίσιμη στο [0, 1]. Άρα $F''(x) = -\eta\mu x\, f(\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x\, f'(\eta\mu x)(\eta\mu x)' \Rightarrow$

$$F''(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x\, f'(\eta\mu x) - \eta\mu x\, f(\eta\mu x) \qquad (1)$$

β) Είναι $F''(0) = \sigma\upsilon\nu^2 0\, f'(\eta\mu 0) - \eta\mu 0\, f(\eta\mu 0) = f'(0) - 0f(0) = f'(0) = 2$

και $F''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{2} f'\left(\eta\mu \frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu \frac{\pi}{2} f\left(\eta\mu \frac{\pi}{2}\right) = 0\, f'(1) - 1\, f(1) = -2$

Επίσης η F'' είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ αφού οι f, f' είναι συνεχείς.

Άρα (Bolzano) $\exists\ x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $F''(x_0) = 0$ δηλαδή υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_F να είναι παράλληλη προς τον x'x.

Γ67. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση
$$g(x) = (x - 1)\,e^x + x^2 + 1.$$
β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$$f_1(x) = xe^x + x^2 \quad \text{και} \quad f_2(x) = e^x - 1$$
έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2 και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

Δ. Γεωργακίλας

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ.Ν. Καζαντζής, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

α) Είναι $g(x) = (x - 1)\,e^x + x^2 + 1$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$$g'(x) = e^x + (x - 1)e^x + 2x = xe^x + 2x = x(e^x + 2) \qquad (1)$$
Προφανώς $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ενώ το πρόσημο της g' και η συμπεριφορά της g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘	$g(0) = 0$	↗

Είναι $g(x) \geq g(0) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ αφού στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

β) Η εξίσωση $f_1(x) = f_2(x)$ (που δίνει τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f_1 και f_2) είναι ισοδυναμεί με την:
$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$
Είδαμε ότι $g(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ και το $g(x) = 0$ μόνο για $x = 0$.
Άρα μοναδική ρίζα η $x = 0$

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $\int_{-1}^{1} |f(x) - f_2(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |g(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx =$
$$= \int_{-1}^{1} \left[(x - 1)\,e^x + x^2 + 1\right] dx = \left[(x - 1)\,e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x - 1)'\,e^x\,dx + \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} =$$
$$= -(-2)\,e^{-1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx + \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 2e^{-1} - \left[e^x\right]_{-1}^{1} + \frac{8}{3} =$$

$$= 2e^{-1} - (e^1 - e^{-1}) + \frac{8}{3} = 3e^{-1} - e + \frac{8}{3} = \frac{3}{e} - e + \frac{8}{3} \ \text{ τ. μονάδες.}$$

Γ68. Έστω ν σημεία σε ευθεία ε και μ σημεία σε ευθεία η (διακεκριμένα) και ε ∦ η.

Α. Με συνδυαστικό τρόπο ν.δ.ο.

α) $\binom{\nu+\mu}{2} - \binom{\nu}{2} + 1 - \binom{\mu}{2} + 1 = \nu \cdot \mu + 2$

β) $\binom{\nu+\mu}{3} - \binom{\nu}{3} + 1 - \binom{\mu}{3} =$
$\mu[(\nu - 1) + (\nu - 2) + \ldots + 1] + \nu \cdot [(\mu - 1) + (\mu - 2) + \ldots + 1]$.

Β. Αν το πλήθος των ευθειών που σχηματίζονται (μαζί με τις ε και η) είναι 32 και των τριγώνων 135 να βρεθεί το πλήθος των σημείων που βρίσκονται στην ε και στην η.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ.Ν. Καζαντζής, Ε. Μήτσιου.

Λύση :

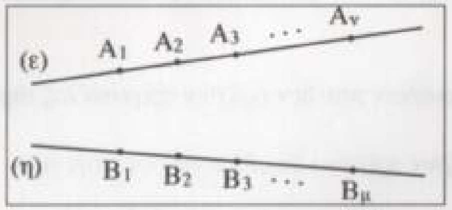
Α. Ας ονομάσουμε $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ τα ν σημεία της ευθείας (ε) και $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ τα μ σημεία της ευθείας (η).

α) Τότε είναι:

$\binom{\nu+\mu}{2}$ το σύνολο των ευθειών που ορίζονται από τα ν + μ μη συνευθειακά σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, B_1, B_2, \ldots, B_\mu$

Όμως τα ν σημεία είναι συνευθειακά και ορίζουν μια(1) ευθεία, ενώ θα όριζαν (αν δεν ήταν) $\binom{\nu}{2}$ ευθείες.

Το ίδιο και τα μ συνευθειακά σημεία θα ορίζουν μία (1) ευθεία



ενώ (αν δεν ήταν) θα όριζαν $\binom{\mu}{2}$ ευθείες.

Έτσι οι ευθείες που ορίζονται από ν + μ σημεία δεν είναι $\binom{\nu+\mu}{2}$ αλλά
$$\binom{\nu+\mu}{2} - \left[\binom{\nu}{2} - 1\right] - \left[\binom{\mu}{2} - 1\right] = \binom{\nu+\mu}{2} - \binom{\nu}{2} + 1 - \binom{\mu}{2} + 1 = \alpha$$

Ένας άλλος όμως τρόπος μέτρησης των προηγούμενων ευθειών μπορεί να γίνει ως εξής: Κάθε ένα από τα σημεία A_i, με καθένα από τα B_j ($1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq j \leq \mu$) ορίζουν $\mu \cdot \nu$ ευθείες συν τις (ε), (η), επί των οποίων ανήκουν τα A_i, B_j αντίστοιχα έχουμε $\mu \cdot \nu + 2$ ευθείες. Έτσι οι ευθείες είναι: $\mu\nu + 2 = \beta$.

Έτσι αφού $\alpha = \beta \Rightarrow \binom{\nu+\mu}{2} - \binom{\nu}{2} + 1 - \binom{\mu}{2} + 1 = \mu\nu + 2$

Ένας άλλος τρόπος βασίζεται στη μέτρηση του πλήθους των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζουν τα σημεία αυτά, αφού πρώτα παρατηρήσουμε ότι η αποδεικτέα είναι ισοδύναμη με την $\binom{\nu+\mu}{2}=\binom{\nu}{2}+\binom{\mu}{2}+\mu\nu$

Πράγματι το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζονται από τα $\mu+\nu$ σημεία είναι $\binom{\nu+\mu}{2}$. Αυτό το πλήθος είναι ίσο με το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων $\binom{\nu}{2}$ που ορίζονται από τα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ συν το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων $\binom{\mu}{2}$ που ορίζονται από τα $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ συν το πλήθος $\mu\cdot\nu$ των τμημάτων που ορίζονται από κάθε σημείο της (ε) με κάθε σημείο της (η). Δηλαδή $\binom{\mu+\nu}{2}=\binom{\nu}{2}+\binom{\mu}{2}+\mu\nu$

β) Ονομάζουμε $\alpha=\binom{\nu+\mu}{3}-\binom{\nu}{3}-\binom{\mu}{3}$ και

$$\beta=\mu\left[(\nu-1)+(\nu-2)+\cdots+1\right]+\nu\left[(\mu-1)+(\mu-2)+\cdots+1\right]$$

Το $\binom{\mu+\nu}{3}$ εκφράζει το πλήθος των «τριγώνων» που ορίζονται από τα $\mu+\nu$ σημεία. (Ακριβέστερα το $\binom{\mu+\nu}{3}$ εκφράζει το πλήθος των τριάδων σημείων από τα $\mu+\nu$).

Μεταξύ αυτών είναι πλήθος $\binom{\nu}{3}$ τριάδων που δεν ορίζουν τρίγωνα ως σημεία της (ε) και $\binom{\mu}{3}$ τριάδες που δεν ορίζουν τρίγωνα επειδή ανήκουν στην (η).

Άρα το πλήθος των πραγματικών τριγώνων είναι $\binom{\mu+\nu}{3}-\binom{\nu}{3}-\binom{\mu}{3}=\alpha$

Τώρα: τα τμήματα $B_\kappa B_\lambda$ της (η) είναι $\binom{\mu}{2}=\frac{\mu(\mu-1)}{2}=(\mu-1)+(\mu-2)+\cdots+2+1$ και καθένα απ' αυτά με κάθε σημείο A_i της (ε) δημιουργούν

$\nu[(\mu-1)+(\mu-2)+\ldots+2+1]$ τρίγωνα.

Όμοια τα $\binom{\nu}{2}=(\nu-1)+(\nu-2)+\ldots+2+1$ τμήματα της (ε) με κάθε σημείο της (η) ορίζουν $\mu[(\nu-1)+(\nu-2)+\ldots+2+1]=\beta$ τρίγωνα.

Όμως το α και το β εκφράζουν το ίδιο πλήθος τριγώνων, άρα $\alpha=\beta$

Β.Δίνεται ότι $\mu\nu+2=32 \Leftrightarrow \mu\cdot\nu=30$ (1)

και $\mu\left[(\nu-1)+(\nu-2)+\ldots+2+1\right]+\nu\left[(\mu-2)+(\mu-1)+\ldots+2+1\right]=135 \Leftrightarrow$

$$\mu\frac{\nu(\nu-1)}{2}+\nu\frac{(\mu-1)}{2}=135 \Leftrightarrow \mu\nu\left[(\nu-1)+(\mu-1)\right]=270 \Leftrightarrow$$

$$30(\mu+\nu-2)=270 \Leftrightarrow \mu+\nu-2=9 \Leftrightarrow$$

$$\mu+\nu=11 \qquad (2)$$

Από τις $\mu\nu=30$ και $\mu+\nu=11$ προκύπτει* ότι: $\nu=5$ και $\mu=6$ ή $\nu=6$, $\mu=5$

* (Τα μ, ν ρίζες της $x^2-11x+30=0$ από την οποία προκύπτουν οι παραπάνω τιμές).

Γ69. Αν $y=\lambda x+\beta$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f συνάρτηση f στο $+\infty$ με $\lambda>0$ και f(x) κοίλη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη της ασυμπτώτου.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίσης, Θ.Ν. Καζαντζής, Ν. Κατσάς, Ε. Μήτσιου.

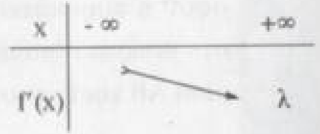
Λύση:

Η f υποτίθεται κοίλη οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda>0.$$

Έτσι αν $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ τότε $f(x)=xg(x)$ θα είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\cdot\lambda=+\infty$.

Άρα $\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{(L'Hosp.)}{=}\lim_{x\to+\infty}f'(x)$



Εφόσον f' γνησίως φθίνουσα, θα είναι $f'(x)>\lambda$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f'(x)=\lambda$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης παράλληλη προς την ευθεία $y=\lambda x+\beta$.

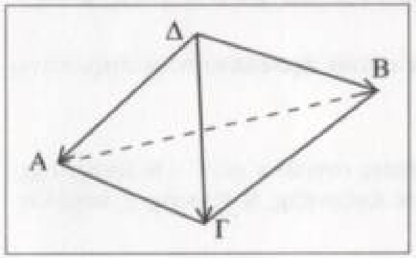
ΣΧΟΛΙΟ

Όταν δίνεται η πληροφορία ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη, δε σημαίνει ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα στο οποίο είναι κυρτή ή κοίλη.

Γ70. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $(AB)^2 \geq (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2$ και Δ τυχαίο σημείο του χώρου. Ν.δ.ο. $(\Gamma\Delta)^2 \leq (A\Delta)^2 + (B\Delta)^2$.

Θ.Ν.Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ.Ν. Καζαντζής, Ν. Λιάπης, Γ. Τσιτσίνιας.



Απόδειξη:

Ονομάζουμε $\vec{\Delta A} = \vec{\alpha}$, $\vec{\Delta B} = \vec{\beta}$, $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{\gamma}$.

Τότε $\vec{AB} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma} = \vec{\gamma} - \vec{\beta}$

και η υπόθεση (1) $(AB)^2 \geq (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2$ γίνεται:

$$\left|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right|^2 \geq \left|\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\gamma} - \vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right)^2 \geq \left(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\right)^2 + \left(\vec{\gamma} - \vec{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow \vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 - 2\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) \geq \vec{\gamma}^2 + \vec{\alpha}^2 - 2\left(\vec{\gamma}\vec{\alpha}\right) + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 - 2\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) - 2\left(\vec{\alpha}\vec{\gamma}\right) - 2\left(\vec{\beta}\vec{\gamma}\right) + \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\gamma}\right|^2 \leq \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\gamma}\right|^2 \Leftrightarrow$$

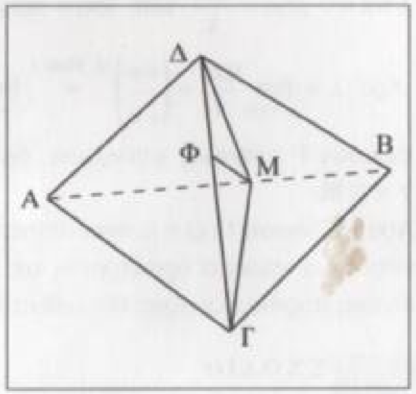
$$\Leftrightarrow \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}\right)^2 \leq \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\gamma}\right|^2$$

Άρα $\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\gamma}\right|^2 \geq \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}\right|^2 \geq 0 \Rightarrow \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 - \left|\vec{\gamma}\right|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\left|\vec{\gamma}\right|^2 \leq \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2$ δηλ. $(\Delta\Gamma)^2 \leq (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2$

ΣΧΟΛΙΟ

Η άσκηση θα μπορούσε να περιληφθεί στις ασκήσεις της Β΄ Λυκείου, αφού η παρακάτω λύση βασίζεται στο θεώρημα διαμέσου. Έτσι αν Μ μέσο ΑΒ και Ρ μέσο ΓΔ έχουμε:



$$(A\Gamma)^2 \leq (\Gamma B)^2 = 2(\Gamma M)^2 + \frac{(AB)^2}{2} \leq (AB)^2$$

$$\Leftrightarrow (AB) \geq 2\,(\Gamma M) \quad (1)$$

Επίσης (θεώρημα διαμέσου στο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$):

$$(A\Delta)^2 + (\Delta B)^2 = 2(\Delta M)^2 + \frac{(AB)^2}{2} \overset{(1)}{\geq} 2(\Delta M)^2 + 2(\Gamma M)^2 = 2\left[(\Delta M)^2 + (\Gamma M)^2\right] =$$

$$= 2\left[2\,(M\Delta)^2 + \frac{(\Gamma\Delta)^2}{2}\right] = 4\,(MP)^2 + (\Gamma\Delta)^2 \geq (\Gamma\Delta)^2$$

Γ71. Έστω f: ℝ → ℝ συνάρτηση, τέτοια ώστε να είναι

$$0 \leq f'(x) \leq f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ είναι $f(x_o) = 0$, τότε θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θ. Ν. Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν. Καζαντζής, Ν. Κατσάς, Ο. Μοσχίδης.

Απόδειξη:

Αφού $f'(x) \geq 0$ η f είναι αύξουσα στο ℝ με τιμές $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Αν λοιπόν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x_o) = 0$ θα είναι

$$0 \leq f(x) \leq f(x_o) = 0 \quad \forall\, x \leq x_o, \quad \text{οπότε} \quad f(x) = 0\ \forall\, x \leq x_o.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^{-x}f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = e^{-x}\,[f'(x) - f(x)] \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι φθίνουσα στο ℝ.

Είναι επίσης $g(x_o) = 0\ \forall\, x \geq x_o$. Συμπεραίνουμε ότι για $x \geq x_o$ έχουμε επίσης $f(x) = e^x g(x) = 0$ και τελικά ότι είναι $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Γ72. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\gamma}\right| = \left|\vec{\delta}\right|$

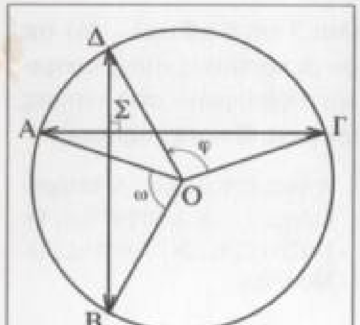
και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\delta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$

να δείξετε ότι θα είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\delta} = 0$

Θ. Ν. Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Θ. Ν. Καζαντζής, Γ. Τσιτσίνιας.

Απόδειξη:

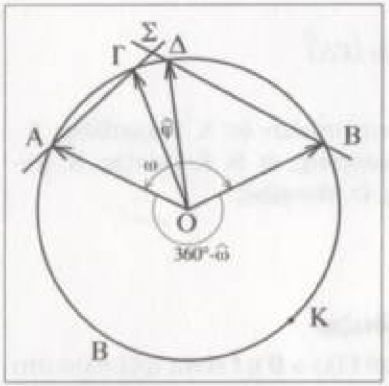


Η απόδειξη θα γίνει με την υπόθεση ότι ισχύει η

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\delta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\delta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} \quad (1)$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο Ο ως σημείο αναφοράς και παίρνουμε τα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ και $\vec{O\Delta} = \vec{\delta}$

Αφού $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\gamma}\right| = \left|\vec{\delta}\right|$, τα Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία του κύκλου (Ο, R), όπου R η κοινή



τιμή των ίσων μέτρων των διανυσμάτων.

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\alpha}\vec{\delta} = \vec{\beta}\vec{\gamma} - \vec{\gamma}\vec{\delta} \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}\left(\vec{\beta} - \vec{\delta}\right) = \vec{\gamma}\left(\vec{\beta} - \vec{\delta}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\right)\left(\vec{\beta} - \vec{\delta}\right) = 0 \quad (2)$$

Είναι όμως $\vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\vec{\beta} - \vec{\delta} = \overrightarrow{\Delta B}$

οπότε η (2) γίνεται $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Delta B} = 0 \quad (3)$

άρα και ΓΑ ⊥ ΔΒ. Έτσι οι χορδές ΓΑ και ΔΒ τέμνονται κάθετα σε σημείο Σ εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου.

Επειδή τώρα η αποδεικτέα: $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\gamma}\vec{\delta} = 0$ ισοδυναμεί με την $R^2 συνω + R^2 συνφ = 0 \Leftrightarrow$

$$R^2 (συνω + συνφ) = 0 \quad (4)$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι $\quad συν\hat{ω} + συν\hat{φ} = 0 \quad (5)$

Στην πρώτη περίπτωση (σχ. 1) είναι $\quad 90^o = \widehat{AΣB} = \dfrac{\left(\widehat{AB}\right) + \left(\widehat{ΓΔ}\right)}{2}^{*} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \widehat{AB} + \widehat{ΓΔ} = 180^o \Rightarrow \hat{ω} + \hat{φ} = 180^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow συνω = -συνφ \Rightarrow συνω + συνφ = 0$$

Στην δεύτερη περίπτωση είναι $\quad 90^o = \widehat{AΣB} = \dfrac{\left(\widehat{AKB}\right) - \left(\widehat{ΓΔ}\right)}{2}^{*} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 180^o = \widehat{AKB} - \left(\widehat{ΓΔ}\right) \Rightarrow 180^o = 360^o - \hat{ω} - \hat{φ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{ω} + \hat{φ} = 180^o \Rightarrow συνω + συνφ = 0$$

Έτσι η (4) ισχύει.

* Οι προτάσεις που αναφέρονται είναι οι ασκήσεις 6 και 7 της § 5.8 (σελ. 135) της ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (εκδ. 1995). Παλαιότερα οι προτάσεις αυτές αναφερόταν ως θεωρήματα στα σχολικά βιβλία. Αργότερα «μεταφέρθηκαν» στις λυμένες εφαρμογές και Παραδείγματα για να καταλήξουν ως ασκήσεις. Και μη χειρότερα . .

Γ73. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τους αριθμούς 1, 2, 3, . . . , ν ($ν \in \mathbb{N}^*$). Αν είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να είναι τούτος πολλαπλάσιο του 3 είναι ίση με 7/22 και η πιθανότητα να είναι πολλαπλάσιο του 4 είναι ίση με 1/4, να βρεθεί η τιμή του ν.

Θ. Ν. Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Καζαντζής, Ν. Λιάπης, Ο. Μοσχίδης.

Λύση :

Είναι γνωστό ότι ο ν μπορεί να γραφεί:

$$ν = 3κ + α \text{ με } α \in \{0, 1, 2\} \text{ και } ν = 4λ + β \text{ με } β \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Επιλέγουμε έναν αριθμό από τους {1, 2, 3, . . . , ν} κκαι έστω τα ενδεχόμενα

Α: «Ο αριθμός είναι πολ/ σιο του 3» και

Β: «Ο αριθμός είναι πολ/ σιο του 4»

Είναι $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(Ω)} = \dfrac{κ}{ν}$ γιατί τα πολλαπλάσια του 3 είναι κ *

Έτσι $\dfrac{κ}{3κ + α} = \dfrac{7}{22} \Leftrightarrow 22κ = 21κ + 7α \Leftrightarrow \boxed{κ = 7α} \quad (1)$

Όμοια $P(B) = \dfrac{λ}{4λ + β} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow β = 0 \Rightarrow \boxed{ν = 4λ} \quad (2)$

Επίσης $ν = 3κ + α = 3(7α) + α = 22α$. Άρα $\boxed{4λ = 22α}$ και α = 0 ή 1 ή 2.

Άρα $α = 2 \Rightarrow \boxed{ν = 44}$

* Αν π.χ. ν = 16, επειδή $ν = 3 \cdot 5 + 1$ τα πολ/ σια του 3 είναι 5 όπως φαίνεται:

1 2 **3** 4 5 **6** 7 8 **9** 10 11 **12** 13 14 **15** 16

Γ74. Έστω $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, συνάρτηση, παραγωγίσιμη για x = 0, και τέτοια ώστε να είναι:

$|f(x)| \le αx^e - e^{2x} + e^{3x} \quad \forall x \in (-1, 1)$,

όπου $α \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι είναι

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } α = -1$$

Θ. Ν. Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν. Καζαντζής, Ν. Κατσάς.

1η Απόδειξη:

Για x = 0 παίρνουμε από την (1)

$|f(0)| \le 0$ οπότε $|f(0)| = 0$ και $f(0) = 0$.

Η (1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$-αxe^x + e^{2x} - e^{3x} \le f(x) \le αxe^x - e^{2x} + e^{3x} \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (2)$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις:

$$g_1(x) = f(x) - αxe^x + e^{2x} - e^{3x} \quad \text{και} \quad g_2(x) = f(x) + αxe^x - e^{2x} + e^{3x}$$

θα είναι $g_1(x) \le 0 \ \forall x \in (-1, 1)$ και $g_2(x) \ge 0 \ \forall x \in (-1, 1)$ ενώ $g_1(0) = g_2(0) = 0$.

Οι συναρτήσεις g_1, g_2 ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος Fermat αφού έχουν: η μεν πρώτη μέγιστο ή δε δεύτερη ελάχιστο για x = 0.

Είναι προφανώς παραγωγίσιμες και οι δύο στο $x_o = 0$ που είναι εσωτερικό σημείο του $Δ = (-1, 1)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι $g'_1(0) = 0$ και $g'_2(0) = 0$.

Όμως έχουμε

$$g'_1(x_o) = f'(x_o) - \alpha e^{x_o} - \alpha x e^{x_o} + 2e^{2x_o} - 3e^{3x_o} \quad \text{και}$$
$$g'_2(x_o) = f'(x_o) + \alpha e^{x_o} + \alpha x e^{x_o} - 2e^{2x_o} + 3e^{3x_o} \quad \text{για} \ -1 < x < 1.$$

Βρίσκουμε λοιπόν $g'_1(0) = f'(0) - \alpha - 1 = 0$ και $g'_2(0) = f'(0) + \alpha + 1 = 0$.

Από τις $f'(0) - \alpha - 1 = 0$ και $f'(0) + \alpha + 1 = 0$ με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι $\quad f'(0) = 0 = f(0)$ και $\alpha = -1$

2η Απόδειξη

Η (2) για $x > 0$ δίνει: $$\frac{-\alpha x e^x + e^{2x} - e^{3x}}{x} \le \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \le \frac{\alpha x e^x - e^{2x} + e^{3x}}{x} \quad (3)$$

ενώ για $x < 0$ $$\frac{\alpha x e^x - e^{2x} + e^{3x}}{x} \le \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \le \frac{-\alpha x e^x + e^{2x} - e^{3x}}{x} \quad (4)$$

Βρίσκουμε (με κανόνα de L' Hospital) ότι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-\alpha x e^x + e^{2x} - e^{3x}}{x} = -(\alpha + 1)$ και

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha x e^x - e^{2x} + e^{3x}}{x} = \alpha + 1$$

οπότε αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

Άρα πρέπει $-(\alpha + 1) \le f'(0) \le \alpha + 1$, $\quad (\alpha + 1) \le f'(0) \le -(\alpha + 1)$

οπότε $\quad f'(0) = \alpha + 1 = -(\alpha + 1) \Leftrightarrow \alpha = -1$ και $f'(0) = 0$

Γ75. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$$0 \le f'(x) \le f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι θα είναι $1 \le f(x) \le e^x \ \forall x > 0$.

Θ. Ν. Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν. Καζαντζής, Ν. Κατσάς, F. Barder.

Απόδειξη:

Η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα λοιπόν $f(x) \ge f(0) = 1$ για $x > 0$.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x} f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Θα είναι $g'(x) = e^{-x}[f'(x) - f(x)] \le 0$ στο $\mathbb{R}$ και η g είναι φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Είναι όμως $g(0) = 1$ οπότε $g(x) \le 1 \ \forall x > 0$.

Επειδή $f(x) = e^x g(x) \le e^x \cdot 1 = e^x \ \forall x > 0$, συμπεραίνουμε ότι:
$$\forall x > 0 \Rightarrow 1 \le f(x) \le e^x.$$

x	0	+∞
f(x)	1 ↗	f(x) ≥ 1
g(x)	1 ↘	g(x) ≤ 1

ΣΧΟΛΙΟ (του προτείνοντος)
Ισχύει επίσης:
$e^x \le f(x) \le 1 \ \forall x < 0$

Γ76. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να είναι
$f(x) \le 0$ και $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

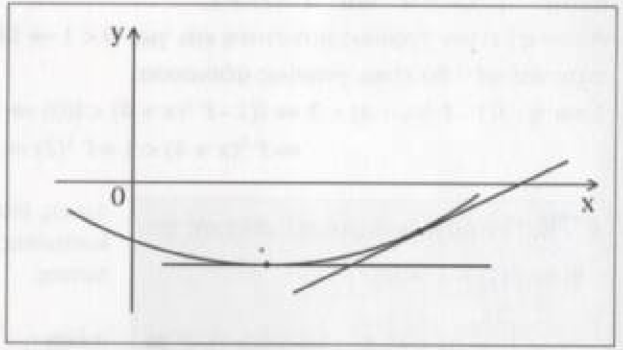
Θ. Ν. Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ. Ν. Καζαντζής.

1η Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση δηλαδή να ισχύει: $f(x) \le 0$ και $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε το διάγραμμα της f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω $\forall x \in \mathbb{R}$ και βρίσκεται προς τα πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη του.

Αφού όμως είναι $f(x) \le 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα C_f της f, άρα και κάθε εφαπτομένης αυτού βρίσκονται κάτω από τον άξονα των x. Τούτο όμως είναι αδύνατο (δες σχήμα) εκτός και όταν κάθε εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα των x'x.



Αυτό σημαίνει ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ θα είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 0$ γεγονός που αντιφάσκει με την υπόθεση ότι $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

2η Απόδειξη:

Μια άλλη λύση (όχι ουσιαστικά διαφορετική) οδηγεί στο ίδιο άτοπο με «διαφορετικό τρόπο». Έτσι επειδή η εφαπτομένη στο τυχαίο $(x_o, f(x_o))$ του διαγράμματος της f έχει εξίσωση $y = f'(x_o)x + \beta$ και $f(x) \ge f'(x_o)x + \beta$, προκύπτει ότι αν

$$f'(x_o) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [f'(x_o)x + \beta] = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

οπότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$: $f(\xi) > 0$. Άτοπο.

Επίσης αν $\quad f'(x_o) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} [f'(x)x + \beta] = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

οπότε πάλι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$: $f(\xi) > 0$, πάλι άτοπο.

(Φυσικά δεν μπορεί $f'(x_o) = 0 \ \forall x_o \in \mathbb{R}$ αφού τότε $f''(x_o) = 0$. Άτοπο.)

Γ77. Αν η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f: ℝ → ℝ διέρχεται από τα σημεία A(0, 3) και B(1, 2) να λύσετε την ανίσωση

$f(1 - f^{-1}(x+4)) < 3$

Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ.Ν.Καζαντζής, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Αφού C_f διέρχεται από τα σημεία A(0, 3) και B(1, 2) θα έχουμε :

$$f(0) = 3 \quad (1)$$

και

$$f(1) = 2 \quad (2)$$

οπότε $f^{-1}(3) = 0$ και $f^{-1}(2) = 1$.

Αφού η f είναι γνησίως μονότονη και για $0 < 1 \Rightarrow f(0) > f(1)$ προκύπτει ότι η f, οπότε και η f^{-1} θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Έτσι η : $f(1 - f^{-1}(x+4)) < 3 \Leftrightarrow f(1 - f^{-1}(x+4)) < f(0) \Leftrightarrow 1 - f^{-1}(x+4) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x+4) < 1 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow x + 4 > 2 \Leftrightarrow \mathbf{x > -2}$$

Γ78. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο ℝ με $f'(1) = 1$ και

$$f(x) = \int_1^x \left[f^2(t) + \lambda\right] dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) > f(x)$

Χ. Βαφειάδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Γ - Ν Ιωσηφίδης, Θ.Ν.Καζαντζής, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

i) Είναι $f'(1) = 1$ και

$$f(x) = \int_1^x \left[f^2(t) + \lambda\right] dt, \text{ οπότε}$$

$$f'(x) = f^2(x) + \lambda, \ x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Για $x = 1$ η (1) δίνει

$$f'(1) = f^2(1) + \lambda \Rightarrow 1 = 0 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad (2)$$

Άρα $f'(x) = f^2(x) + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η $f(x^3) > f(x) \overset{f \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} x^3 > x \Leftrightarrow x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) > 0$

οπότε (με τη βοήθεια του πίνακα) $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

x	-∞		-1		0		1		+∞
x		-		-	0	+		+	
x - 1		-		-		-	0	+	
x + 1		-	0	+		+		+	
		-		+		-		+	

Γ79. Δίνεται ο ν×ν πίνακας A για τον οποίο $A^4 = \mathbf{O}$. Δείξτε ότι για κάθε κ, λ, μ με μ ≠ 0 ο πίνακας $A^3 + \kappa A^2 + \lambda A + \mu I$ αντιστρέφεται και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

Λ. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Ν - Γ. Ιωσηφίδης.

Λύση 1η:

Έστω ότι $A^3 \neq \mathbf{O}$, και

$(A^3 + \kappa A^2 + \lambda A + \mu I)^{-1} = xA^3 + yA^2 + \omega \cdot A + z \cdot I$

Τότε: $(A^3 + \kappa A^2 + \lambda A + \mu I) \cdot (xA^3 + yA^2 + \omega \cdot A + z \cdot I) = I \Leftrightarrow$

$(z + \kappa\omega + \lambda y + \mu x) \cdot A^3 + (\kappa z + \lambda\omega + \mu y) \cdot A^2 + (\lambda z + \mu\omega) \cdot A + (\mu z - 1) \cdot I = \mathbf{O}$ (1)

αφού $A^4 = \mathbf{O}$

(1) επί $A^3 \Rightarrow (\mu z - 1) \cdot A^3 = \mathbf{O}$ άρα $\mu z - 1 = 0$ (2)

(1) $A^2 \Rightarrow (\lambda z + \mu\omega) \cdot A^3 = \mathbf{O}$ λόγω (2) οπότε $\lambda z + \mu\omega = 0$ (3)

Όμοια βρίσκουμε $\kappa z + \lambda\omega + \mu y = 0$ (4)

$z + \kappa\omega + \lambda y + \mu x = 0$ (5)

Από τις (2), (3), (4), (5) εύκολα βρίσκουμε ότι

$$z = \frac{1}{\mu}, \ \omega = -\frac{\lambda}{\mu^2}, \ y = \frac{\lambda^2 - \kappa\mu}{\mu^3}, \ x = \frac{-\lambda^3 + 2\kappa\lambda\mu - \mu^2}{\mu^4},$$

και στη συνέχεια ότι ο πίνακας

$$B = \frac{-\lambda^3 + 2\kappa\lambda\mu - \mu^2}{\mu^4} \cdot A^3 + \frac{\lambda^2 - \kappa\mu}{\mu^3} \cdot A^2 - \frac{\lambda}{\mu^2} \cdot A + \frac{1}{\mu} \cdot I$$

είναι πράγματι, αντίστροφος του $A^3 + \kappa A^2 + \lambda A + \mu I$.

Στην περίπτωση που $A^3 = \mathbf{O}$, ο πίνακας $B = \frac{\lambda^2 - \kappa\mu}{\mu^3} \cdot A^2 - \frac{\lambda}{\mu^2} \cdot A + \frac{1}{\mu} \cdot I$,

που προκύπτει από τον παραπάνω τύπο, είναι επίσης αντίστροφος του $\kappa A^2 + \lambda A + \mu I$.

Λύση 2η: Η 2η λύση είναι βασισμένη στο Άρθρο του Ο. Μοσχίδη στο τεύχος 2 της Μ. Π. (σελ. 99 - 93) όπου αποδεικνύεται η αντιστρεψιμότητα του B, αλλά δεν βρίσκεται ο αντίστροφός του.

Θέτουμε $B = A^3 + \kappa A^2 + \lambda A + \mu I \Rightarrow B - \mu I = A^3 + \kappa A^2 + \lambda A \Rightarrow$

$(B - \mu I)^4 = (A^3 + \kappa A^2 + \lambda A)^4 = [A \cdot (A^2 + \kappa A + \lambda I)]^4 = A^4 \cdot (A^2 + \kappa A + \lambda I)^4 = \mathbf{O}$

αφού οι πίνακες A, $A^2 + \kappa A + \lambda I$ αντιμετατίθενται.

Έτσι: $(B - \mu I)^4 = \mathbf{O} \Rightarrow B^4 - 4\mu B^3 + 6\mu^2 B^2 - 4\mu^3 B + \mu^4 I = \mathbf{O} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B \cdot \left[-\frac{1}{\mu^4} \cdot \left(B^3 - 4\mu B^2 + 6\mu^2 B - 4\mu^3 I\right)\right] = I.$$

Επομένως ο B είναι αντιστρέψιμος και $B^{-1} = -\frac{1}{\mu^4}\left(B^3 - 4\mu B^2 + 6\mu^2 B - 4\mu^3 I\right) = \dots$

Γ80. Αν $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

i) Να αποδειχθεί ότι $A_{31} + A_{32} = A_{33}$

ii) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα Α.

iii) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα

$4x+y-2\omega=0$
$x-2y+\omega=0$ έχει άπειρες λύσεις
$11x-4y-\omega=0$

και ότι $\frac{x}{A_{31}} = \frac{y}{A_{32}} = \frac{\omega}{A_{33}}$.

Χ. Λώλης

Λύσεις έστειλαν οι:Λ. Ιωσηφίδης, Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Ν. Λιάπης .

Λύση :

α) Βρίσκουμε $A_{31}=-3$, $A_{32}=-6$, $A_{33}=-9$

β) Είναι $|A| = \ldots = 0$

γ) Λόγω του (β) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Εύκολα παίρνουμε ότι: $\omega = 3x$, $y = 2x$ οπότε

$$x = \frac{y}{2} = \frac{\omega}{2} \Rightarrow \frac{x}{-3} = \frac{y}{-6} = \frac{\omega}{-9} \ldots$$

Γ81. α) Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} \alpha-1 & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$$

Να δείξετε ότι: $A^2+A+|A|\,I = \mathbf{O}$.

β) Αν το σύστημα:

$$(\Sigma)\begin{cases} |A|^2x+|A|\,y+\omega=0 \\ 2|A|\,x+(|A|+1)\,y+2\omega=0 \\ x+y+\omega=0 \end{cases}$$

έχει και μη μηδενικές λύσεις, δείξτε ότι: i) $A^3 = I$,

ii) $A^{1996}+\left[(A^2)^{-1}\right]^{1997}+(A^2+A)^{2000}=\mathbf{O}$

Χ. Σιωζόπουλος

Λύσεις έστειλαν οι:Λ.Ιωσηφίδης, Ν.- Γ. Ιωσιφίδης, Ν. Κατσάς, Ν.Λιάπης, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

α) Απλό (πράξεις)

β) i) Θα είναι $D_\Sigma = O \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |A|^3 - 3|A|^2 + 3|A| - 1 = O \Leftrightarrow (|A|-1)^3 = O$ άρα $|A| = 1$.

Έτσι: $A^2 + A + I = \mathbf{O} \Rightarrow$

$(A-I)(A^2+A+I) = \mathbf{O} \Rightarrow A^3 - I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^3 = I$.

ii) Λόγω του (i) είναι

$A^{1996} = (A^3)^{665} \cdot A = I \cdot A = A$

Ακόμη $A^2 \cdot A = I \Leftrightarrow (A^2)^{-1} = A$ και

$[(A^2)^{-1}]^{1997} = A^{1997} = A^2$

Τέλος $A^2 + A = -I \Rightarrow (A^2+A)^{2000} = (-I)^{2000} = I$

Έτσι: $A^{1996} + [(A^2)^{-1}]^{1997} + (A^2+A)^{2000} = A + A^2 + I = \mathbf{O}$

Γ82. Αν για τον τετραγωνικό πίνακα Α ισχύουν οι σχέσεις $(A+3I)^3 = 8I$ και $adj(A+3I) = (A+3I)(A+5I)$, να δείξετε ότι ο Α είναι τύπου 4×4 και στη συνέχεια να τον προσδιορίσετε.

Π. Βασιλειάδης- Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης , Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση 1η:

Θέτοντας $B = A + 3I$, οι δοσμένες σχέσεις γράφονται:

$B^3 = 8I$ (1) και $adjB = B \cdot (B+2I)$ (2)

● (1) $\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{8}B^2$ και $|B|^3 = 8^\nu$ οπότε $|\mathbf{B}| = \mathbf{2^\nu}$

Έτσι $adjB = |B| \cdot B^{-1}$ και λόγω της (2):

$$B \cdot (B+2I) = 2^\nu \cdot \frac{1}{8} \cdot B^2 \overset{\cdot B^{-1}}{\Leftrightarrow} B + 2I = \frac{2^\nu}{8} \cdot B \text{ οπότε } B \cdot (2^{\nu-3}-1) = 2I \quad (3)$$

και τότε: $|(2^{\nu-3}-1) \cdot B| = |2I| \Rightarrow (2^{\nu-3}-1)^\nu \cdot |B| = 2^\nu \Leftrightarrow (2^{\nu-3}-1)^\nu \cdot 2^\nu = 2^\nu$.

Έτσι: $(2^{\nu-3}-1)^\nu = 1$ οπότε $2^{\nu-3}-1 = 1$

[αν $2^{\nu-3}-1=-1$, είναι $2^{\nu-3}=0$ άτοπο]. Τελικά $2^{\nu-3}=2$ άρα $\nu-3=1$ και $\nu=4$

Έτσι: (3) $\Leftrightarrow B = 2I \Leftrightarrow A + 3I = 2I \Leftrightarrow \mathbf{A = -I_4}$

Λύση 2η:

Όμοια με τη 1η λύση, παίρνουμε: $(A+3I)^{-1} = \frac{1}{8}(A+3I)^2$, $|A+3I| = 2^\nu$

και $A + 5I = 2^{\nu-3}(A+3I) \Leftrightarrow A = \frac{5-3\cdot 2^{\nu-3}}{2^{\nu-3}-1} \cdot I = \lambda \cdot I$ όπου $\lambda = \frac{5-3\cdot 2^{\nu-3}}{2^{\nu-3}-1}$

Έτσι, η σχέση $(A+3I)^3 = 8I$ γράφεται $(\lambda I + 3I)^3 = 8I \Leftrightarrow (\lambda+3)^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = -1$, άρα

$A = -I$ και $\frac{5-3\cdot 2^{\nu-3}}{2^{\nu-3}-1} = -1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2^{\nu-3} = 2 \Leftrightarrow \mathbf{\nu = 4}$

Γ83. Εστω Α $\nu \times \nu$ πίνακας και

$A^3 - A^2 + A = \mathbf{O}$.

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4px$. Αν η ευθεία $y = |A| \cdot x + |A - I|$ εφάπτεται στην παραβολή να προσδιοριστεί η παραβολή.

Α. Καραγιώργος

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Λ. Ιωσηφίδης , Ν.- Γ. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς , Ν. Λιάπης , Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Δίνεται ότι: $A \cdot (A^2 - A + I) = \mathbf{O}$ (1)

Ο Α αντιστρέφεται, διαφορετικά $|A| = 0$ και η ευθεία $y = 0 \cdot x + |A - I| \Leftrightarrow y = |A - I|$ δεν εφάπτεται στην παραβολή.

Έτσι (1) $\Rightarrow A^2 - A + I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^2 - A = -I \Rightarrow |A^2 - A| = (-1)^\nu$ (2)

Η ευθεία $y=|A|\cdot x + |A-I|$ εφάπτεται στην παραβολή $y^2=4px$ μόνον όταν το σύστημα

$$\begin{cases} y^2 = 4px \\ y = |A| \cdot x + |A - I| \end{cases}$$ έχει μοναδική λύση.

Ισοδύναμα, όταν η εξίσωση $(|A| \cdot x + |A - I|)^2 = 4px$ έχει διπλή ρίζα. Μηδενίζοντας τη διακρίνουσα βρίσκουμε $p = |A| \cdot |A - I| = |A^2 - A| = (-1)^\nu$, λόγω της (2).

Έτσι η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 4x$, αν ν άρτιος ή $y^2 = -4x$, αν ν περιττός.

Γ84. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

Αν ισχύουν $|A+I| = 16$ και $|A-I| = 6$, να δείξετε ότι το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \lambda x + \mu \\ \gamma x + \delta y = \lambda y - \nu \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

έχει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ μοναδική λύση.

Χ. Σιωζόπουλος

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Ιωσηφίδης, Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Ν. Κατσάς, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Από τις σχέσεις $|A + I| = 16$, $|A - I| = 6$

έχουμε $\begin{cases} \alpha\delta + \alpha + \delta + 1 - \beta\gamma = 16 \\ \alpha\delta - \alpha - \delta + 1 - \beta\gamma = 6 \end{cases}$

Με προσθαφαίρεση των τελευταίων, παίρνουμε: $\alpha\delta - \beta\gamma = 10$, $\alpha + \delta = 5$

Για το σύστημα $\begin{cases} (\alpha - \lambda)x + \beta y \\ \gamma x + (\delta - \lambda) y = -\nu \end{cases}$ έχουμε τώρα:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\gamma = \lambda^2 - 5\lambda + 10 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έτσι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Γ85. Αν για τους $\nu \times \nu$ πίνακες A, B ισχύει $A - 2B = 3AB$ και B αντιστρέψιμος να δείξετε ότι

i) ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1}.

ii) $AB = BA$

iii) $(BA)^{-1} = 3A^{-1} + 2(A^{-1})^2$

Γ. Σαράφης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Λ. Ιωσηφίδης, Γ.- Ν. Ιωσηφίδης, Ν.Κατσάς ,Ν.Λιάπης.

Λύση :

i) Δίνεται ότι: $A - 2B = 3AB \Rightarrow$

$AB^{-1} - 2BB^{-1} = 3ABB^{-1} \Leftrightarrow$

$AB^{-1} - 3A = 2I \Leftrightarrow A \cdot (B^{-1} - 3I) = 2I \Leftrightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(B^{-1} - 3I\right)$$

ii) $A - 2B = 3AB \Leftrightarrow AB \cdot (B^{-1} - 3I) = 2B \Leftrightarrow AB \cdot 2A^{-1} = 2B \Leftrightarrow ABA^{-1}A = BA \Leftrightarrow AB = BA$

iii) $3A^{-1} + 2(A^{-1})^2 = A^{-1}(3I + 2A^{-1}) = A^{-1}(3I + B^{-1} - 3I) = A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$.

Γ86. Έστω A πίνακας $\nu \times \nu$ τέτοιος ώστε $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I = O$ (1). Να δείξετε ότι αν $k^2 + \beta = \lambda + \alpha k$ (2) και $\gamma \neq \lambda(\alpha - k)$ (3) ο $A^2 + kA + \lambda I$ αντιστρέφεται και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Χ. Τάνης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν.- Γ. Ιωσηφίδης, Ν. Λιάπης.

Λύση :

Εκτελούμε τη διαίρεση

$$(x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma) : (x^2 + \kappa x + \lambda)$$

και βρίσκουμε:

$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x^2 + \kappa x + \lambda)(x + \alpha - \kappa) + (\beta - \lambda - \alpha\kappa + \kappa^2)x + \gamma - \lambda(\alpha - \kappa)$.

Έτσι:

$A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I = (A^2 + \kappa A + \lambda I)[A + (\alpha - \kappa)I] + (\beta - \lambda - \alpha\kappa + \kappa^2) \cdot A + [\gamma - \lambda(\alpha - \kappa)] I$

Από τα δεδομένα, γίνεται: $(A^2 + \kappa A + \lambda I) \cdot [A + (\alpha - \kappa) I] + [\gamma - \lambda(\alpha - \kappa)] I = O$

οπότε $$\left(A^2 + \kappa A + \lambda I\right)^{-1} = -\frac{1}{\gamma - \lambda(\alpha - \kappa)} \cdot [A + (\alpha - \kappa) I]$$

Λύση : (Λιάπη)

Δίνεται $\kappa^2 + \beta = \lambda + \alpha\kappa \Leftrightarrow \beta = \lambda + \kappa(\alpha - \kappa)$ και η σχέση γράφεται:

$A^3 + \alpha A^2 + [\lambda + \kappa(\alpha - \kappa)]A + \gamma I = O \Leftrightarrow$

$A^3 + (\alpha + \kappa - \kappa)A^2 + [\lambda + \kappa(\alpha - \kappa)]A + [\gamma - \lambda(\alpha - \kappa) + \lambda(\alpha - \kappa)] \cdot I = O \Leftrightarrow$

$A^3 + (\alpha - \kappa)A^2 + \kappa A^2 + \kappa(\alpha - \kappa)A + \lambda A + \lambda(\alpha - \kappa)I + [\gamma - \lambda(\alpha - \kappa)] I = O \Leftrightarrow$

$A^2[A + (\alpha - \lambda) I] + \kappa A[A + (\alpha - \kappa)I] + \lambda \cdot [A + (\alpha - \kappa)I] = [\lambda(\alpha - \kappa) - \gamma] \cdot I \Leftrightarrow$

$(A^2 + \kappa A + \lambda I) \cdot [A + (\alpha - \kappa) \cdot I] = [\lambda(\alpha - \kappa) - \gamma] \cdot I$ οπότε

$$\left(A^2 + \kappa A + \lambda I\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda(\alpha - \kappa) - \gamma} \cdot [A + (\alpha - \kappa) I]$$

Γ87. Αν για τον $\nu \times \nu$ πίνακα A ισχύει $A^2 - A + 4I = O$ να δείξετε ότι ο πίνακας A^2 είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του.

Χ. Σιωζόπουλος

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Λιάπης Ν., Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Είναι $A(I - A) = 4I \Rightarrow [A \cdot (I - A)]^2 = 16I$

και αφού $A(I - A) = (I - A) \cdot A = A - A^2$ έχουμε $A^2(I - A)^2 = 16I$ άρα

$$\left(A^2\right)^{-1} = \frac{1}{16}(I - A)^2 = \frac{1}{16}\left(I - 2A + A^2\right) = \frac{1}{16}(I - 2A + A - 4I)$$

Τελικά $$\left(A^2\right)^{-1} = -\frac{1}{16}(A + 3I)$$

Γ88. Δίνονται τα συστήματα

(Σ_1) $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ και

(Σ_2) $\begin{cases} \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \omega = 0 \\ \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 \omega = 0 \\ \alpha_5 x + \beta_5 y + \gamma_5 \omega = 0 \end{cases}$

ώστε το (Σ_1) να έχει μόνο τη λύση $(x,y) = (-2, 1)$ και το (Σ_2) να έχει άπειρες λύσεις. Αν A πίνακας 3×2 και B πίνακας 2×3 ώστε να ισχύουν $AB = \Gamma$, $(AB)^2 = 5\Gamma$ και $BA = \Delta$ όπου

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ. , Ν. Ιωσηφίδης.

Λύση :

α) Αφού το ομογενές σύστημα (Σ_2) έχει άπειρες λύσεις θα είναι

$|\Gamma| = 0 \Leftrightarrow |AB| = 0$

β) Επειδή το (Σ_1) έχει μοναδική λύση, θα είναι $|\Delta| \neq 0$. Από $(AB)^2 = 5\Gamma \Rightarrow ABAB = 5AB$ οπότε $BABABA = 5BABA \Leftrightarrow \Delta^3 = 5\Delta^2 \Rightarrow |\Delta|^3 = 5^2|\Delta|^2 \Leftrightarrow |\Delta| = 25$ αφού $|\Delta| \neq 0$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \end{bmatrix} \text{ και } \Delta = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

να βρεθούν

α) Η ορίζουσα του πίνακα ΑΒ

β) Η ορίζουσα του πίνακα Δ και

γ) Να αποδειχθεί ότι $(D_x+2D_y)^2 = |\Gamma|$

$$\text{όπου } D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Χ. Λώλης

γ) Αφού το (Σ_1) έχει μοναδική λύση $(x, y) = (-2, 1)$ θα είναι

$$-2 = \frac{D_x}{D}, \quad 1 = \frac{D_y}{D} \quad \text{άρα}$$

$$(D_x + 2D_y)^2 = 0^2 = 0 = |\Gamma|$$

Γ89. Αν για τους $\nu \times \nu$ πίνακες Α, Β ισχύουν: $A = AB + I$ και $B = BA + I$ δείξτε ότι:

i) $A^6 = I$, ii) $(AB + I)^{345} = A^{363}$.

Χ. Σιωζόπουλος

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ. , Ν- Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν. , Λιάπης Ν.

Λύση :

i) $A^2 = (AB+I)A = ABA+A(B-I)+A = AB$

Έτσι $A^3 = ABA = A(B-I) = AB - A = -I$ οπότε $A^6 = (-I)^2 = I$

ii) Θέλουμε να δείξουμε ότι $A^{345} = A^{363} \Leftrightarrow A^{345}(I - A^{18}) = \mathbf{O}$ (1)

Όμως $A^{18} = (A^6)^3 = I$ άρα $I - A^{18} = I - I = \mathbf{O}$ και η (1) είναι προφανής.

Γ90. Αν για τους $\nu \times \nu$ πίνακες Α, Β ισχύουν: $BA + A + I = \mathbf{O}$ και

$B^2 A = BA - B$

να δείξτε ότι:

i) Ο πίνακας $B + I$ είναι αντιστρέψιμος

ii) $A = B$.

iii) $A^{1996} + B^{1997} + (BA + A)^{1998} = \mathbf{O}$.

Χ. Σιωζόπουλος

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

i) $BA + A = -I \Leftrightarrow (B+I)A = -I$ άρα $(B+I)^{-1} = -A$

ii) $B^2 A - A = BA - B \Leftrightarrow (B+I)(B - A) = \mathbf{O}$ και ο $B + I$ αντιστρέφεται οπότε $B - A = O \Leftrightarrow A = B$

iii) Από (ii) η σχέση $BA + A + I = \mathbf{O}$ γράφεται $A^2 + A + I = \mathbf{O}$ οπότε

$(A - I)(A^2 + A + I) = O \Leftrightarrow A^3 = I$

Έτσι: $A^{1996} + B^{1997} + (BA + A)^{1998} = A^{1996} + A^{1997} + (-I)^{1998} =$

$A^{1996}(I + A) + I = (A^3)^{665} A(I + A) + I = A + A^2 + I = \mathbf{O}$

Γ91. Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα (Σ) για το οποίο γνωρίζουμε ότι: $D^2 = k \cdot D_x \cdot D_y$ και $D = \lambda(D_x + D_y)$ για κάποιους $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν το (Σ) έχει μοναδική λύση, να την προσδιορίσετε σε σχέση με το λ.

Λ. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Λιάπης Ν.

Λύση :

Αν (x_o, y_o) η μοναδική λύση του (Σ) θα είναι $x_o = \frac{D_x}{D}$, $y_o = \frac{D_y}{D}$, $D \neq 0$.

Από τις δοσμένες σχέσεις παίρνουμε

$$\varkappa \frac{D_x}{D}\frac{D_y}{D} = 1 \quad \text{και} \quad \lambda\left(\frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D}\right) = 1 \quad \text{οπότε} \quad x_o + y_o = \frac{1}{\lambda}, \quad x_o \cdot y_o = \frac{1}{\varkappa}$$

Συμπεραίνουμε ότι οι x_o, y_o είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 - \frac{1}{\lambda} \cdot \omega + \frac{1}{\varkappa} = 0$,

η οποία οφείλει να έχει διπλή ρίζα [διαφορετικά: αν ω_1, ω_2 οι ρίζες με $\omega_1 \neq \omega_2$ θα είχαμε $(x_o, y_o) = (\omega_1, \omega_2)$ ή $(x_o, y_o) = (\omega_2, \omega_1)$ άτοπο]. Έτσι

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2} - \frac{4}{\varkappa} = 0 \Leftrightarrow \varkappa = 4\lambda^2 \quad \text{και} \quad (x_o, y_o) = \left(\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}\right)$$

Γ92. Έστω Κ, Λ, Μ συνευθειακά σημεία του επιπέδου και η ευθεία που ορίζουν δεν διέρχεται από το Ο και πίνακας Α ν×ν. Αν ισχύει

$\vec{OK} + |A + I| \cdot \vec{O\Lambda} - 2|A - I| \cdot \vec{OM} = \vec{0}$

και $A^2 - A - I = \mathbf{O}$

να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα Α. (Ο η αρχή των αξόνων).

Α. Καραγιώργος

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Αφού τα Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά και ισχύει

$$\vec{OK} + |A+I|\,\vec{OK} - 2|A - I|\,\vec{OM} = \vec{O}$$

θα έχουμε $1 + |A+I| - 2|A - I| = 0$ (1)

[Άσκηση Γ΄ Ομάδας, Σχ. Βιβλίου].

Ακόμη: $A^2 - A - I = \mathbf{O} \Rightarrow |A| \cdot |A - I| = 1$ (2)

ενώ $A^2 = A + I \Rightarrow |A|^2 = |A + I|$ (3)

Λόγω των (2), (3) η (1) γράφεται:

$$1 + |A|^2 - \frac{2}{|A|} = 0 \Leftrightarrow |A|^3 + |A| - 2 = 0 \text{ απ' όπου βρίσκουμε } |A| = 1.$$

Γ93. Εάν οι πίνακες Α, Β είναι ν × μ και μ × ν αντίστοιχα με ν > μ να δείξετε ότι: |ΑΒ| = 0.

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ., Ν. Ιωσηφίδης.

Λύση :

Αποδεικνύουμε πρώτα μία βοηθητική **ΠΡΟΤΑΣΗ**

Το ομογενές μ×ν σύστημα ΒΧ = **Ο** με μ < ν δέχεται και μη μηδενική λύση.

Απόδειξη

Έστω $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{\mu 1} & \beta_{\mu 2} & \cdots & \beta_{\mu\nu} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}$

Το σύστημα ΒΧ = **Ο** γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1\mu}x_\mu + \cdots + \beta_{1\nu}x_\nu = 0 \\ \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \cdots + \beta_{2\mu}x_\mu + \cdots + \beta_{2\nu}x_\nu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{\mu 1}x_1 + \beta_{\mu 2}x_2 + \cdots + \beta_{\mu\mu}x_\mu + \cdots + \beta_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε τον πίνακα Γ = [βij] μ×μ

- Αν | Γ | ≠ 0, το σύστημα (Σ) με αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ και γνωστούς $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_\nu$ δέχεται μοναδική λύση ∀ $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_\nu$. Έτσι το ομογενές (Σ) δέχεται και μη μηδενικές λύσεις.
- Αν | Γ | = 0, το μ×μ σύστημα $\begin{cases} \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1\mu}x_\mu = 0 \\ \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \cdots + \beta_{2\mu}x_\mu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{\mu 1}x_1 + \beta_{\mu 2}x_2 + \cdots + \beta_{\mu\mu}x_\mu = 0 \end{cases}$

δέχεται και μη μηδενικές λύσεις. Αν $(t_1, t_2, \ldots, t_\mu)$ είναι μία τέτοια λύση, τότε η νιάδα $(t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}, t_{\mu+2}, \ldots, t_\nu)$ όπου $t_{\mu+1} = t_{\mu+2} = \ldots = t_\nu = 0$ είναι λύση του (Σ).

Έτσι σε κάθε περίπτωση το μ×ν σύστημα (Σ) δέχεται μη μηδενική λύση.

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη της Γ93:

Έστω $X = X_o$ μία μη μηδενική λύση του μ×ν συστήματος ΒΧ = **Ο**.

Τότε $BX_o = \mathbf{O} \Rightarrow (AB)\,X_o = \mathbf{O}$ δηλ. το ν×ν ομογενές σύστημα (ΑΒ) Χ = **Ο** δέχεται τη μηδενική λύση $X = X_o$. Έτσι | ΑΒ | = 0.

Γ94. Έστω Α(x), Β(x) ν × ν πίνακες ν περιττός, x∈[α,β]. Δίνεται συνάρτηση f: [α, β] → ℝ.

Αν ισχύει $A^2(x) - 2A(x) = f(x)I$ και

$B^2(x) - 2\sqrt{2}B(x) = -f(x)I$,

για κάθε x∈[α, β] δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο [α, β].

Α. Καραγιώργος

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ν.- Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν.

Λύση :

Από τη σχέση $A^2(x) - 2A(x) = f(x)\,I$ παίρνουμε

$A^2(x) - 2A(x) + I = (f(x)+1)\cdot I \Leftrightarrow$

$[A(x) - I]^2 = (f(x)+1)\cdot I$ άρα και

$|A(x) - I|^2 = (f(x)+1)^\nu$. Αφού ν περιττός: $f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -1$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

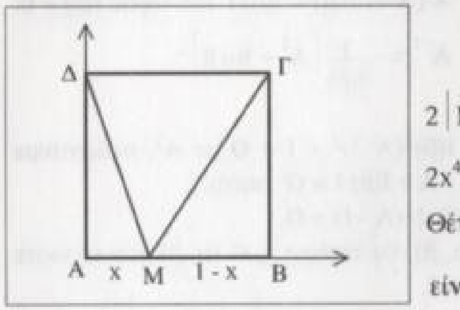
Όμοια από: $B^2(x) - 2\sqrt{2}\,B(x) = -f(x)\,I$ βρίσκουμε $f(x) \leq 2$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Τελικά: $-1 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ και η f είναι φραγμένη στο [α, β].

Γ95. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α = 1. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ εσωτερικό του τμήματος ΑΒ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση:

$$2\left|\overrightarrow{MA}\right|^4 = \overrightarrow{M\Gamma}\,\overrightarrow{M\Delta}$$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης



Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης. Αιάπης Ν., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Έστω $\left|\overrightarrow{MA}\right| = x$, $x \in [0, 1]$.

Τότε $\left|\overrightarrow{MB}\right| = 1 - x$

$\overrightarrow{M\Gamma} = \begin{bmatrix} 1-x \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{M\Delta} = \begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix}$ οπότε:

$2\left|\overrightarrow{MA}\right|^4 = \overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{M\Delta} \Leftrightarrow 2x^4 = -x(1-x) + 1 \Leftrightarrow$

$2x^4 - x^2 + x - 1 = 0$.

Θέτοντας $f(x) = 2x^4 - x^2 + x - 1$, $x \in [0, 1]$

είναι $\left.\begin{matrix} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{matrix}\right\}$

και από το Θ. Bolzano: υπάρχει $x \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ υπάρχει

εσωτερικό σημείο Μ του ΑΒ: $2\left|\overrightarrow{MA}\right|^4 = \overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{M\Delta}$

Γ96. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει η σχέση $2\left|x\vec{\alpha}+(1-x)\vec{\beta}\right| \geq \left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ιωσηφίδης Λ., Ν.- Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Για $x = 1$, παίρνουμε: $\left|\vec{\alpha}\right| \geq \left|\vec{\beta}\right|$

Για $x = 0$, όμοια: $\left|\vec{\beta}\right| \geq \left|\vec{\alpha}\right|$

άρα $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$ (1)

Για $x = \frac{1}{2}$, βρίσκουμε: $2\left|\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}\right| \geq \left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| \geq \left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$

Όμως $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| \leq \left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$ για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ οπότε τελικά

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$ (2) Από (1) (2): $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

Γ97. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\beta) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
Έστω A ν×ν πίνακας και ισχύει $A^3 + f(\alpha)A + f(\beta)I = \mathbf{O}$. Δείξτε ότι
i) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος
ii) Αν ισχύει $f(\alpha)(A^{-1})^3 + f(\beta)(A^{-1})^2 + I = \mathbf{O}$ δείξτε ότι $A = I$.

Α. Καραγιώργος

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ιωσηφίδης Λ., Ν.- Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

i) Δίνεται ότι:

$A\cdot[A^2+f(\alpha)I] = -f(\beta)\cdot I$ και αφού $f(\beta) \neq 0$:

$A^{-1} = -\frac{1}{f(\beta)}\left[A^2 + f(\alpha)I\right]$

ii) Πολλαπλασιάζοντας την $f(\alpha)(A^{-1})^3 + f(\beta)(A^{-1})^2 + I = \mathbf{O}$ με A^3, παίρνουμε $f(\alpha)I + f(\beta)\cdot A + A^3 = \mathbf{O}$. Όμως $A^3 + f(\alpha)\cdot A + f(\beta)I = \mathbf{O}$ οπότε :
$f(\alpha)\cdot A + f(\beta)\cdot I = f(\alpha)\cdot I + f(\beta)\cdot A \Leftrightarrow [f(\alpha) - f(\beta)]\cdot(A - I) = \mathbf{O}$.
Αν ήταν $f(\alpha) = f(\beta)$, από Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, θα υπήρχε $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, άτοπο. Ώστε $f(\alpha) \neq f(\beta)$ άρα $A = I$.

Γ98. Έστω A ν×ν πίνακας, ν περιττός και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν ισχύει $A^2(x) - f(x)A = (-1 + x - x^2)\,I$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$ να υπολογίσετε το $f'(1)$.

Α. Καραγιώργος

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$A^2(x) - f(x)\,A(x) + \frac{f^2(x)}{4}I = \left(-1 + x - x^2 + \frac{f^2(x)}{4}\right)I$$

οπότε $\left|A(x) - \frac{f(x)}{2}\cdot I\right|^2 = \left[\frac{f^2(x)}{4} - 1 + x - x^2\right]^{\nu}$

Αφού ν περιττός, θα είναι $\frac{f^2(x)}{4} - 1 + x - x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Θέτοντας $g(x) = \frac{f^2(x)}{4} - 1 + x - x^2$ είναι $g(1) = \frac{2^2}{4} - 1 + 1 - 1^2 = 0$ οπότε

(1) $\Leftrightarrow g(x) \geq g(1) \;\forall x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η g παρουσιάζει στο $x_o = 1$ ακρότατο. Από Θ. Fermat θα είναι $g'(1) = 0$.

Όμως $g'(x) = \frac{f(x)\,f'(x)}{2} + 1 - 2x$ άρα $\frac{f(1)\,f'(1)}{2} + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 1$.

Γ99. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = 1$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(0) + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta})f(0) = 1$ και $\left|\vec{\alpha} + f(x)\vec{\beta}\right| \leq \sqrt{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

Π. Βασιλειάδης- Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ. Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Δίνονται: $f^2(0) + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta})f(0) - 1 = 0$ (1)

και $\left|\vec{\alpha} + f(x)\vec{\beta}\right|^2 \leq \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow$

$f^2(x) + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta})f(x) - 1 \leq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$ (2)

αφού $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = 1$

Θέτουμε $g(x) = f^2(x) + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta})f(x) - 1$. Λόγω των (1), (2) έχουμε $g(x) \leq g(0) \;\forall x \in \mathbb{R}$ και από το Θ. Fermat θα είναι $g'(0) = 0$.

Όμως $g'(x) = 2f(x)\cdot f'(x) + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta})f'(x)$, άρα

$$2f(0)\cdot f'(0) + 2(\vec{\alpha}\,\vec{\beta})\cdot f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0)\cdot\left[f(0) + (\vec{\alpha}\vec{\beta})\right] = 0$$

Αν ήταν $f(0) = -(\vec{\alpha}\vec{\beta})$ τότε (1) $\Leftrightarrow (\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 - 2(\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 = -1$, άτοπο.

Έτσι, τελικά $f'(0) = 0$.

Γ100. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx \\ \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx & \alpha \end{bmatrix}$$

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν.

Λύση :

Η εξίσωση $|A - xI| = 0$ γράφεται:

$(\alpha - x)^2 - \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \cdot \int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$

Αν η εξίσωση $|A - xI| = 0$ έχει μόνο μία λύση στο IR, δείξτε ότι υπάρχει $\theta \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\theta) \cdot g(\theta) = 0$.

Α. Καραγιώργος

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \cdot \int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx = 0$$

και έχει μία λύση στο IR όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta g^2(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta f^2(x)dx = 0 \quad (1)$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi, \varrho \in (\alpha, \beta)$: $\int_\alpha^\beta g^2(x)dx = (\beta - \alpha)\, g^2(\xi)$

και $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx = (\beta - \alpha)\, f^2(\varrho)$ οπότε $(1) \Leftrightarrow (\beta - \alpha)^2 \cdot g^2(\xi) \cdot f^2(\varrho) = 0 \Leftrightarrow f(\varrho) = 0$ ή $g(\xi) = 0$

ΣΧΟΛΙΟ

Για την ακρίβεια, επειδή $f^2(x) \geq 0$, $g^2(x) \geq 0$ η (1) γράφεται

$$\int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx = 0 \text{ ή } \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0,\ \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ ή } f^2(x) = 0\ \ \forall x \in [\alpha, \beta]$$

$\Leftrightarrow g(x) = 0 \ \ \forall x \in [\alpha, \beta]$ ή $f(x) = 0 \ \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \ \ \forall x \in [\alpha, \beta]$

Γ101. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνάρτηση, συνεχής στο $x_o = 0$ και τέτοια ώστε να

$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Να δείξετε ότι θα είναι $f'(0) = \alpha$.

(Το πρόβλημα βρίσκεται στο περιοδικό Revue des Mathematique Speciales)

Θ. Ν. Καζαντζής

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ. Μοσχίδης Ο.

Λύση 1η:

Είναι $\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = \alpha$ άρα

$$\lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{\alpha}{2}.$$

Όμοια $\lim_{x \to 0} \frac{f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2^2}\right)}{x} = \frac{\alpha}{2^2}, \ldots, \lim_{x \to 0} \frac{f\left(\frac{x}{2^{\nu-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}{x} = \frac{\alpha}{2^\nu}$

Με πρόσθεση κατά μέλη: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)}{x} = \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\right)$

Καθώς $\nu \to +\infty$, επειδή f συνεχής στο $x_o = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \alpha \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow f'(0) = \alpha$

Λύση 2η:

Είναι $\lim_{x \to 0}\left[\frac{f(2x) - f(0)}{x} - \frac{f(x) - f(0)}{x}\right] = \alpha \Leftrightarrow 2\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \alpha$

$\overset{2x \to x}{\Leftrightarrow} \ 2\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \alpha \Leftrightarrow f'(0) = \alpha$.

[Τα $\lim_{2x \to 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ είτε υπάρχουν είτε όχι, ταυτόχρονα]

Γ102. Έστω $f(x) = \alpha \frac{x^3}{3} - \beta x^2 + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και A το σύνολο $A = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς από το A [με επανατοποθέτηση] και τους τοποθετούμε στην θέση των α, β. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

α) η f παρουσιάζει στο $x_o = 1$ τοπικό ελάχιστο.

β) η f παρουσιάζει στο $x_o = 0$ τοπικό ελάχιστο.

Α. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν.

Λύση :

Είναι $N(\Omega) = 10 \cdot 10 = 100$. Έστω Β, Γ τα ενδεχόμενα των ερωτημάτων α), β).

Έχουμε $f'(x) = \alpha x^2 - 2\beta x = x(\alpha x - 2\beta)$

α) Η f' είναι τριώνυμο με ρίζες $0, \frac{2\beta}{\alpha}$.

Η f παρουσιάζει στο $x_o = 1$ τοπικό ελάχιστο όταν

$\frac{2\beta}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 2\beta}$ και $\alpha > 0$.

[έτσι ώστε η f' να είναι αρνητική μεταξύ των ριζών της 0, 1 και θετική δεξιά του 1]. Έτσι $B = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$ και $P(B) = \frac{3}{100} = 3\,\%$

β) Η f παρουσιάζει στο $x_o = 0$ τοπικό ελάχιστο όταν

$$\left(\alpha > 0 \text{ και } \frac{2\beta}{\alpha} < 0\right) \text{ ή } \left(\alpha < 0 \text{ και } \frac{2\beta}{\alpha} > 0\right)$$

x	$-\infty$		$2\beta/\alpha$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

x	$-\infty$		0		$2\beta/\alpha$		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)		↘		↗		↘	

Δηλαδή όταν: $(\alpha > 0, \beta < 0)$ ή $(\alpha < 0, \beta < 0)$.

Συνοπτικά, όταν: $\beta < 0$, $\alpha \in A$. Έτσι $N(\Gamma) = 10 \cdot 4 = 40$ και $P(\Gamma) = \frac{40}{100} = 40\,\%$

Γ103. Έστω

$f(x) = \alpha_{2\nu}x^{2\nu}+\alpha_{2\nu-1}x^{2\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_o$

όπου οι συντελεστές $\alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1},..., \alpha_1$ επιλέγονται τυχαία, διαδοχικά, από το σύνολο $\{1, 2, 3,..., 2\nu\}$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: "η κλίση της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ να είναι μεγαλύτερη του ν ".

Λ. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν.

Λύση :

Είναι $f'(x)=2\nu\alpha_{2\nu}\cdot x^{2\nu-1}+(2\nu-1)\cdot\alpha_{2\nu-1}\cdot x^{2\nu-1} + ... + 2\alpha_2 x + \alpha_1 \Rightarrow f'(0) = \alpha_1$

Έστω Α το ενδεχόμενο: $\alpha_1 > \nu$.

Ο δ.χ. Ω αποτελείται από τις μεταθέσεις των 2ν στοιχείων του συνόλου $\{1,2,..., 2\nu\}$.

Ευνοϊκές περιπτώσεις για το Α είναι οι μεταθέσεις εκείνες όπου $\alpha_1 > \nu$ [δηλ. $\alpha_1 = \nu+1$ ή $\nu+2$ . . . ή 2ν]. Υπάρχουν λοιπόν, ν τρόποι επιλογής του α_1 και τα υπόλοιπα 2ν - 1 στοιχεία [από τα $\alpha_2, \alpha_3, . . . , \alpha_{2\nu}$] επιλέγονται από τους υπόλοιπους 2ν - 1 αριθμούς με (2ν - 1)! τρόπους.

Έτσι $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\nu\cdot(2\nu-1)!}{(2\nu)!} = \dfrac{\nu}{2\nu} = \dfrac{1}{2} = 50\ \%$

Γ104. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\binom{\nu}{\kappa-1}\binom{\nu}{\kappa}}+\sqrt{\binom{\nu}{\kappa}\binom{\nu}{\kappa+1}}<\frac{1}{2}\binom{\nu+2}{\kappa+1}$$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι:Ν. - Γ. Ιωσηφίδης

Λύση :

Θέτουμε: $\binom{\nu}{\kappa} = \alpha,\ \binom{\nu}{\kappa-1} = \beta,\ \binom{\nu}{\kappa+1} = \gamma$

Ακόμη ισχύει: $\binom{\nu+1}{\kappa}+\binom{\nu+1}{\kappa+1} = \dfrac{(\nu+1)!}{\kappa!\,(\nu+1-\kappa)!}+\dfrac{(\nu+1)!}{(\kappa+1)!\,(\nu-\kappa)!} =$

$$= \frac{(\nu+1)!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}\left(\frac{1}{\nu+1-\kappa}+\frac{1}{\kappa+1}\right) = \frac{(\nu+1)!\,(\nu+2)}{(\kappa+1)!\,(\nu+1-\kappa)!} = \frac{(\nu+2)!}{(\kappa+1)!\,[(\nu+2)-(\kappa+1)]\,!} = \binom{\nu+2}{\kappa+1}$$

Δείξαμε δηλαδή ότι: $\binom{\nu+2}{\kappa+1} = \binom{\nu+1}{\kappa}+\binom{\nu+1}{\kappa+1}$ οπότε:

$$\binom{\nu+2}{\kappa+1} = \binom{\nu+1}{\kappa}+\binom{\nu+1}{\kappa+1} = \binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa-1}+\binom{\nu}{\kappa}+\binom{\nu}{\kappa+1} = 2\alpha+\beta+\gamma$$

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\gamma} < \frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma) \Leftrightarrow (\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma) > 2\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt{\alpha\gamma}$ που ισχύει

αφού $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ $\forall$ x, y > 0 με το "=" όταν x = y.

Γ105. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_1 - z_2|$

Να αποδείξετε ότι $z_1^2 + z_2^2 = 0$

Π. Βασιλειάδης - Γ. Μαυρίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση 1η:

Αν $z_1 = 0$ τότε $z_2 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Έστω $z_1 \neq 0$.

Δίνεται ότι: $|z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2$

Από $|z_1|^2 = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow 2z_1\overline{z_1} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}z_2 + \overline{z_1}z_2^2 = 0 \Leftrightarrow z_1|z_2|^2 + \overline{z_1}z_2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1^2|z_2|^2 + z_1\overline{z_1}z_2^2 = 0 \Leftrightarrow z_1^2|z_1|^2 + |z_1|^2 z_2^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1|^2(z_1^2 + z_2^2) = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = 0$

Λύση 2η:

Αν $z_2 = 0$ τότε $z_1 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Έστω $z_2 \neq 0$.

Τότε, θέτουμε $w = \frac{z_1}{z_2}$ και από $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_1 - z_2|$ έχουμε:

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |1| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| \Leftrightarrow |w| = 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}|w - 1|$, δηλαδή $|w| = 1$, $|w - 1| = \sqrt{2}$

Έτσι: $(w-1)(\overline{w}-1) = 2 \Leftrightarrow w\overline{w} - (w + \overline{w}) + 1 = 2 \Leftrightarrow w + \overline{w} = 0$ άρα $w = \lambda i$.

Όμως $|w| = 1 \Leftrightarrow |\lambda i| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$. Τελικά $w = i$ ή $w = -i \Leftrightarrow z_1 = z_2\cdot i$ ή $z_1 = -z_2\cdot i$. Και στις δύο περιπτώσεις είναι $z_1^2 + z_2^2 = 0$.

Λύση 3η:

Αν $z_2 = 0$ τότε $z_1 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Έστω $z_2 \neq 0$. Θέτουμε $|z_1| = |z_2| = \alpha$ οπότε

οπότε $|z_1 - z_2| = \alpha\sqrt{2}$.

Από την ταυτότητα: $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ βρίσκουμε $|z_1+z_2| = \alpha\sqrt{2}$.

Έτσι $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} \in I \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in I$ κ.λ.π.

όπως προηγουμένως.

Γ106. Να υπολογιστεί το

$$\lim_{x \to 1997} \frac{x^{x^{1997}} - 1997^{1997^{1997}}}{x - 1997}$$

Χ. Λώλης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Λιάπης Ν.

Λύση :

Έστω $1997 = \alpha$.

Τότε $\lim\limits_{x \to 1997} \dfrac{x^{x^{1997}} - 1997^{1997^{1997}}}{x - 1997} = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{x^{x^{\alpha}} - \alpha^{\alpha^{\alpha}}}{x - \alpha} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\left(x^{x^{\alpha}} - \alpha^{\alpha^{\alpha}}\right)'}{(x - \alpha)'} =$

$$= \lim_{x \to \alpha} \left(x^{x^{\alpha}}\right)' = \lim_{x \to \alpha} \left(e^{x^{\alpha} \cdot \ln x}\right)' = \lim_{x \to \alpha} \left[e^{x^{\alpha} \cdot \ln x} \cdot \left(x^{\alpha} \ln x\right)'\right] = \lim_{x \to \alpha} \left[x^{x^{\alpha}} \cdot \left(\alpha x^{\alpha - 1} \ln x + x^{\alpha - 1}\right)\right] =$$

$$= \alpha^{\alpha^{\alpha}} \cdot \left(\alpha \cdot \alpha^{\alpha - 1} \ln \alpha + \alpha^{\alpha - 1}\right) = 1997^{1997^{1997}} \cdot 1997^{1996} \cdot (1997 \cdot \ln 1997 + 1)$$

Γ107. Δείξτε ότι η εξίσωση $\ln(\ln x) = x$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Λ. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ιωσηφίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση 1η:

Είναι $\ln(\ln x) = e^x \Leftrightarrow \ln x = e^x, \ x > 1$ (1)

Για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \le x - 1 < x < x + 1 \le e^x$ άρα $\ln x < e^x$ οπότε η (1) είναι αδύνατη. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$.

Λύση 2η:

Είναι $\ln(\ln x) = e^x \Leftrightarrow e^x = \ln x \Leftrightarrow e^{e^x} = x, \ x > 1$.

Έστω $f(x) = e^{e^x} - x, \ x > 1$. Τότε $f'(x) = e^{e^x} \cdot e^x - 1 > 0 \ \forall x > 1$, αφού $f'(x) > e^e \cdot e - 1 > 0$.

Έτσι f γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$, άρα $\forall \ x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = e^e - 1 > 0$ δηλ. $f(x) > 0$ και η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Γ108. Να λυθεί η ανίσωση στο $\mathbb{R}$:

$$(x^2 + e)^{x^4 + e} \ge (x^4 + e)^{x^2 + e}$$

Λ. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Γ. Τσιτσίνιας.

Λύση :

Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $(x^4 + e) \ln (x^2 + e) \ge (x^2 + e) \ln (x^4 + e) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(x^2 + e\right)}{x^2 + e} \ge \frac{\ln\left(x^4 + e\right)}{x^4 + e} \Leftrightarrow f\left(x^2 + e\right) \ge f\left(x^4 + e\right) \quad (1)$$

όπου θέσαμε $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Αλλά $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ και $f'(x) \le 0 \ \ \forall x \ge e$

Έτσι f γν. φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ και επειδή $x^2 + e$, $x^4 + e \ge e \ \ \forall x \in \mathbb{R}$:

$(1) \Leftrightarrow x^2 + e \le x^4 + e \Leftrightarrow x^2 \le x^4 \Leftrightarrow x^2 (x^2 - 1) \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$ ή $x = 0$ ή $x \ge 1$.

Γ109. Να υπολογισθεί το

$$\int \varepsilon\varphi 2x \ \varepsilon\varphi 3x \ \varepsilon\varphi 5x \ dx$$

Χ. Λώλης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. - Γ. Ιωσηφίδης

Λύση :

Είναι $\varepsilon\varphi 5x = \varepsilon\varphi(2x + 3x) = \dfrac{\varepsilon\varphi 2x + \varepsilon\varphi 3x}{1 - \varepsilon\varphi 2x \cdot \varepsilon\varphi 3x}$

άρα $\varepsilon\varphi 5x\,(1 - \varepsilon\varphi 2x \cdot \varepsilon\varphi 3x) = \varepsilon\varphi 2x + \varepsilon\varphi 3x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 5x - \varepsilon\varphi 2x - \varepsilon\varphi 3x = \varepsilon\varphi 2x \cdot \varepsilon\varphi 3x \cdot \varepsilon\varphi 5x$ και

$$\int \varepsilon\varphi 2x \cdot \varepsilon\varphi 3x \cdot \varepsilon\varphi 5x dx = \int (\varepsilon\varphi 5x - \varepsilon\varphi 2x - \varepsilon\varphi 3x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{5} \ln |\sigma\upsilon\nu 5x| + \frac{1}{2} \ln |\sigma\upsilon\nu 2x| + \frac{1}{3} \cdot \ln |\sigma\upsilon\nu 3x| + c$$

[Θεωρήσαμε γνωστό ότι $\int \varepsilon\varphi x dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$]

Γ110. Έστω Α ν×ν πίνακας αντιστρέψιμος και συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |A^2 + x \cdot I|$.

Αν $\int_0^1 f(t)\, dt < 0$ δείξτε ότι

i) Υπάρχει $\theta_1 \in (0, 1)$ ώστε ο πίνακας $A^2 + \theta_1 \cdot I$ να μην αντιστρέφεται.

ii) Υπάρχει $\theta_2 \in (0,1)$ ώστε $\int_0^{\theta_2} f(t) dt = 0$

Α. Καραγιώργος

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. - Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν.

Λύση :

i) Είναι $f(0) = |A|^2 > 0$ αφού ο Α αντιστρέφεται. Αν $f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (0, 1)$ θα είναι, λοιπόν: $f(x) > 0 \ \ \forall x \in [0, 1]$ και

συνεπώς $\int_0^1 f(x) dx > 0$ άτοπο.

Ώστε υπάρχει $\theta_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\theta_1) = 0 \Leftrightarrow |A^2 + \theta_1 I| = 0 \Leftrightarrow$ ο $A^2 + \theta_1 I$ δεν αντιστρέφεται.

ii) Έστω $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. Είναι $g(1) < 0$.

Ακόμη $f(0) > 0$ και f συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε υπάρχει περιοχή $(0, \delta)$ με

$$f(0) > 0 \ \ \forall x \in (0, \delta) \Rightarrow \int_0^{\delta} f(t) dt > 0.$$

Έτσι $g(\delta) > 0$ και από Θ. Bolzano στο $[\delta, 1]$ θα είναι $g(\theta_2) = 0$ για κάποιο $\theta_2 \in (\delta, 1) \subseteq (0, 1)$

Γ111. Έστω $f(x)=\int_{\sqrt{x}-1}^{\sqrt{x}+1}\sqrt{1+t^2}\,dt$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

Λ. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλαν οι: Ν. - Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν.

Λύση :

Είναι $f(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}+1}\sqrt{1+t^2}\,dt-\int_{1}^{\sqrt{x}-1}\sqrt{1+t^2}\,dt$ άρα

$$f'(x)=\sqrt{1+(\sqrt{x}+1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{1+(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{x}+x}-\sqrt{2-2\sqrt{x}+x}}{2\sqrt{x}}$$

και $$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2+2\sqrt{x}+x}^{\,2}-\sqrt{2-2\sqrt{x}+x}^{\,2}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{2+2\sqrt{x}+x}+\sqrt{2-2\sqrt{x}+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{x}+x}+\sqrt{2-2\sqrt{x}+x}}=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Γ112. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\text{ημ}x}\sqrt{\text{εφ}t}\,dt}{\int_0^{\text{εφ}x}\sqrt{\text{ημ}t}\,dt}$$

Χ. Λώλης

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Εφαρμόζουμε κανόνα De L' Hospital $\left[\text{Μορφή } \frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\text{ημ}x}\sqrt{\text{εφ}t}\,dt}{\int_0^{\text{εφ}x}\sqrt{\text{ημ}t}\,dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\text{εφ}(\text{ημ}x)}\cdot(\text{ημ}x)'}{\sqrt{\text{ημ}(\text{εφ}x)}\cdot(\text{εφ}x)'}=\lim_{x\to 0}\left[\text{συν}^3x\sqrt{\frac{\text{εφ}(\text{ημ}x)}{\text{ημ}(\text{εφ}x)}}\right]=$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{[\text{εφ}(\text{ημ}x)]'}{[\text{ημ}(\text{εφ}x)]'}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\text{συν}^2(\text{ημ}x)}\cdot\text{συν}x}{\text{συν}(\text{εφ}x)\cdot\frac{1}{\text{συν}^2x}}}=\sqrt{\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1}}=1$$

Γ113. α) Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^{\pi}x\,\text{ημ}x\,(3+\text{συν}^2x)\,dx=\frac{10\pi}{3}$$

β) Να υπολογισθεί το $I=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx$

Χ. Λώλης

Λύση έστειλαν οι: Λ. Θαρραλίδης, Ν. Ιωσηφίδης.

Λύση :

α) $I=\int_0^{\pi}x\,\text{ημ}x\,(3+\text{συν}^2x)\,dx=3\int_0^{\pi}x\,\text{ημ}x\,dx+\int_0^{\pi}x\,\text{ημ}x\,\text{συν}^2x\,dx=I_1+I_2$

όπου $I_1=-3\int_0^{\pi}x\,(\text{συν}x)'\,dx=-3\left[x\,\text{συν}x\right]_0^{\pi}+3\int_0^{\pi}\text{συν}x\,dx=3\pi$

ενώ $I_2=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}x\,(\text{συν}^3x)'\,dx=-\frac{1}{3}\left[x\,\text{συν}^3x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\text{συν}^3x\,dx=$

$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}(1-\text{ημ}^2x)\cdot(\text{ημ}x)'\,dx=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\cdot\int_0^{0}(1-u^2)\,du=\frac{\pi}{3}$.

Τελικά $I=3\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$.

β) Θέτουμε $x=\text{εφ}\theta$ οπότε $dx=(1+\text{εφ}^2\theta)\,d\theta=(1+x^2)\,d\theta\Leftrightarrow\frac{dx}{1+x^2}=d\theta$

Έτσι: $I=\int_0^{\pi/4}\ln(1+\text{εφ}\theta)\,d\theta$

Έστω τώρα $t=\frac{\pi}{4}-x$ οπότε $dt=-dx$ και $\text{εφ}x=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{1-\text{εφ}t}{1+\text{εφ}t}$.

Έχουμε λοιπόν: $1+\text{εφ}x=\frac{2}{1+\text{εφ}t}$ άρα $\ln(1+\text{εφ}x)=\ln 2-\ln(1+\text{εφ}t)$ συνεπώς

$I=\int_0^{\pi/4}\left[\ln 2-\ln(1+\text{εφ}t)\right](-dt)=\int_0^{\pi/4}\ln 2\,dt-\int_0^{\pi/4}\ln(1+\text{εφ}t)\,dt$ δηλαδή

$I=\int_0^{\pi/4}\ln 2\,dt-I\Leftrightarrow 2I=\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}$ άρα $\mathbf{I=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2}$

Γ114. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο IR τέτοια ώστε

$$f(x) = \int_0^x (f^2(t) + e^t - t + 1)\,dt$$

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της, $\forall x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να λυθεί η ανίσωση

$$f^{-1}(x\ln x - x + 1) > f^{-1}(0)$$

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν.

Λύση :

α) Είναι $f'(x) = f^2(x) + e^x - x + 1 \geq f^2(x) + x + 1 - x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ αφού $e^x \geq x + 1$. Έτσι $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ και f γν. αύξουσα στο IR.

Όμως $f(0) = \int_0^0 \left[f^2(t) + e^t - t + 1\right] dt = 0$

άρα: $\begin{cases} f(x) < 0 & \text{για } x < 0 \\ f(x) > 0 & \text{για } x > 0 \end{cases}$

β) Είναι $f''(x) = 2f(x)f'(x) + e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$

Για $x > 0$ είναι $\left.\begin{matrix} 2f(x) \cdot f'(x) > 0 \\ e^{x-1} > 0 \end{matrix}\right\}$ άρα $f''(x) > 0$

ενώ για $x < 0$: $f''(x) < 0$. Ακόμη $f''(0) = 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και έχει σημείο καμπής το (0, 0) δηλ. την αρχή των αξόνων.

γ) Η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα άρα:

$$f^{-1}(x\ln x - x + 1) > f^{-1}(0) \Leftrightarrow x\ln x - x + 1 > 0 \quad (1)$$

Θέτοντας $g(x) = x\ln x - x + 1,\ x > 0$ είναι $g'(x) = \ln x$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $g(1) = 0$. Έτσι $(1) \Leftrightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow x \neq 1$ δηλ. $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Γ115. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη στο [α, β] και $0 \in [\alpha, \beta]$.

Δείξτε ότι η εξίσωση:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)\,dt = xf(x) - x^3 - \alpha f(\alpha)$$

έχει μοναδική ρίζα στο [α, β].

Ε. Μήτσιου

Λύσεις έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Ν. - Γ. Ιωσηφίδης, Κατσάς Ν., Λιάπης Ν.

Λύση :

Θέτοντας $g(x) = \int_{f(\alpha)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ και

$f^{-1}(t) = y \Leftrightarrow t = f(y)$ είναι

$dt = f'(y)\,dy,\ y_1 = \alpha,\ y_2 = x$ άρα

$$g(x) = \int_\alpha^x y \cdot f'(y)\,dy = \left[y\,f(y)\right]_\alpha^x - \int_\alpha^x f(y)\,dy = xf(x) - \alpha f(\alpha) - \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

Η εξίσωση γράφεται τώρα: $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Γ114. Έστω ότι για τους ν×ν πίνακες Α, Β ισχύει $A^2 + B^2 = \mathbf{O}$ και Β μη αντιστρέψιμος καθώς και ΑΒ = ΒΑ. Να δειχθεί ότι ο πίνακας κΑ+λΒ, είναι μη αντιστρέψιμος για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

Αρκεί να δειχθεί ότι $|\kappa A + \lambda B| = 0$.

Είναι $|\kappa A + \lambda B|^2 = |(\kappa A + \lambda B)^2| = |\kappa^2 A^2 + 2\kappa\lambda AB + \lambda^2 B^2| = |-\kappa^2 B^2 + 2\kappa\lambda AB + \lambda^2 B^2| =$

$$= |-\kappa^2 B + 2\kappa\lambda A + \lambda^2 B| \cdot |B| = |-\kappa^2 B + 2\kappa\lambda A + \lambda^2 B| \cdot 0 = 0$$

αφού ο Β είναι μη αντιστρέψιμος. Έτσι $|\kappa A + \lambda B|^2 = 0$ και φυσικά $|\kappa A + \lambda B| = 0$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Γ115. Έστω πίνακας Α ν×ν με ν περιττό και $A = [\alpha_{ij}] = \begin{cases} \alpha, & i = j \\ \beta, & i < j \\ 0, & i > j \end{cases}$ με

$\alpha, \beta \in \{-999, -998, \ldots, -1, 2, \ldots, 999\}$.

Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = |A - \alpha \cdot \beta \cdot x \cdot I|,\ x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Β: <η C_f να τέμνει τον x'x σε σημείο του (0, 1)>.

Π. Κουρσουμπάς

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Είναι $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$ και

$$A - \alpha\beta x I = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha\beta x & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \alpha - \alpha\beta x & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha - \alpha\beta x \end{bmatrix}$$

οπότε $f(x) = |A - \alpha\beta x I| = (\alpha - \alpha\beta x)^\nu = \alpha^\nu (1 - \beta x)^\nu$

Η C_f τέμνει τον x'x στο σημείο $A(x_o, 0)$ με $f(x_o) = 0 \Leftrightarrow \alpha^\nu (1 - \beta x_o)^\nu = 0$ απ' όπου

$x_o = \frac{1}{\beta}$. Το x_o βρίσκεται στο (0, 1) μόνον όταν $0 < \frac{1}{\beta} < 1 \Leftrightarrow \beta > 1$.

Ευνοϊκές περιπτώσεις για το ενδεχόμενο Β είναι τα ζεύγη (α, β) με β > 1 δηλαδή

$N(B) = 1997 \cdot 998$ και επειδή $N(\Omega) = 1997 \cdot 1997$ βρίσκουμε $P(B) = \frac{998}{1997}$.

Γ116. Αν Α, Β ν×ν με $A^2 = 3AB = B^2$, να δειχθεί $|\kappa A + \lambda B| = \mathbf{O}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Κ. Τσέλιος

Λύση έστειλε ο Τσέλιος Κ.

Λύση :

Έχουμε $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot 3AB = 3A^2B = 3B^2 \cdot B = 3B^3$ άρα $A^3 = 3B^3$ (1)

Όμοια $B^3 = 3A^3$ οπότε $(1) \Leftrightarrow A^3 = 3 \cdot 3A^3 \Leftrightarrow A^3 = \mathbf{O}$ και φυσικά $B^3 = \mathbf{O}$, $A^2B = \mathbf{O}$, $AB^2 = \mathbf{O}$.

Ακόμη $\mathbf{O} = A^3 = 3ABA = B^2A$ άρα $B^2A = ABA = \mathbf{O}$.

Όμοια βρίσκουμε $BA^2 = BAB = \mathbf{O}$.

Έτσι έχουμε $(\varkappa A + \lambda B)^3 = \varkappa^3A^3 + \varkappa^2\lambda A^2B + \varkappa^2\lambda ABA + \varkappa\lambda^2AB^2 + \varkappa^2\lambda BA^2 + \varkappa\lambda^2BAB + \varkappa\lambda^2B^2A + \lambda^3B^3 = \mathbf{O}$ από τα παραπάνω οπότε και $|(\varkappa A + \lambda B)^3| = O$ άρα $|\varkappa A + \lambda B| = 0$ για κάθε $\varkappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Γ117. Έστω ο μ×μ πίνακας Α τέτοιος ώστε $(A - I)^2 = \mathbf{O}$, να δείξετε ότι:
$A^\nu (A^2 - I) = A^2 - I$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Α. Τσομίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Είναι $A^2 - 2A + I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A^2 = 2A - I \quad (1)$

Έτσι $A^3 = A(2A - I) = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 3A - 2I$

Αποδεικνύουμε επαγωγικά [απλό] ότι $A^\nu = \nu A - (\nu - 1) \cdot I, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Έτσι: $A^\nu \cdot (A^2 - I) = [\nu A - (\nu - 1) I] \cdot (A^2 - I) = \nu A^3 - \nu A - (\nu - 1)A^2 + (\nu - 1) I =$
$= \nu(3A - 2I) - \nu A - (\nu - 1)(2A - I) + (\nu - 1) I = \ldots = 2A - 2I =$
$= 2A - I - I = A^2 - I$, λόγω της (1)

Γ118. Δίνεται ο μη μηδενικός ν×ν πίνακας Α με $(A - I)^\varkappa + (A - I)^{\varkappa+1} = A$ και $A^2 = \mathbf{O}$. Δείξτε ότι ο $\varkappa \in \mathbb{N}^*$ είναι άρτιος.

Α. Θαρραλίδης

Λύσεις έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση 1η:

Δίνεται ότι $(A - I)^\nu \cdot [I + (A - I)] = A \Leftrightarrow$
$(A - I)^\nu \cdot A = A \Leftrightarrow (-1)^\nu \cdot (I - A)^\nu \cdot A = A \quad (1)$

Όμως $A^2 = \mathbf{O}$ άρα

$(I - A)^\nu = I - \nu A + \mathbf{O} - \mathbf{O} \ldots = I - \nu A$ και $(1) \Leftrightarrow (-1)^\nu \cdot (I - \nu A) \cdot A = A \Leftrightarrow (-1)^\nu \cdot (A - \nu A^2) = A \Leftrightarrow (-1)^\nu \cdot A = A$ και αφού $A \neq \mathbf{O}$: $(-1)^\nu = 1$ άρα ν άρτιος.

Λύση 2η:

Αφού $A^2 = \mathbf{O}$, εύκολα δείχνουμε με επαγωγή ότι ισχύει:

$$(A - I)^\nu = \begin{cases} I - \nu A, & \text{αν ν άρτιος} \\ \nu A - I, & \text{αν ν περιττός} \end{cases} \quad \text{Έτσι:}$$

- αν ν περιττός [⇔ ν+1 άρτιος], η δοσμένη σχέση γράφεται:
  $(\nu A - I) + [I - (\nu+1)A] = A \Leftrightarrow -A = A \Leftrightarrow A = \mathbf{O}$, άτοπο
- αν ν άρτιος, γίνεται: $(I - \nu A) + [(\nu+1)A - I] = A \Leftrightarrow A = A$ που ισχύει.

Γ119. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός 3×3 πίνακας Α τέτοιος ώστε $A^3 + A - I = \mathbf{O}$ και $\text{adj}A = A^2$.

Γ. Μαυρίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Είναι $A^3 + A = I \Leftrightarrow A \cdot (A^2 + I) = I$ και ο Α αντιστρέφεται.

Έτσι: $\text{adj}A = A^2 \Leftrightarrow |A| \cdot A^{-1} = A^2 \Leftrightarrow A^3 = |A| \cdot I$ οπότε
$|A| \cdot I + A - I = \mathbf{O} \Leftrightarrow A = (1 - |A|) \cdot I$ δηλαδή $A = \lambda \cdot I$, όπου $\lambda = 1 - |A|$

Η αρχική σχέση γράφεται: $(\lambda I)^3 + \lambda I - I = \mathbf{O} \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda - 1 = 0$

Έστω $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda - 1$. Είναι $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ άρα υπάρχει λ_o: $f(\lambda_o) = 0$.

Ακόμη $f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 1 > 0$, άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και το λ_o είναι μοναδικό.

Υπάρχει, λοιπόν μοναδικό λ_o τέτοιο ώστε $A = \lambda_o \cdot I$.

Γι' αυτό το λ_o ικανοποιείται προφανώς η $A^3 + A - I = \mathbf{O}$.

Ακόμη $\lambda_o^3 = 1 - \lambda_o$ άρα

$\text{adj}A = |A| \cdot A^{-1} = (1 - \lambda_o) \cdot (A^2 + I) = (1 - \lambda_o)(\lambda_o^2 + 1) \cdot I = (\lambda_o^2 + 1 - \lambda_o^3 - \lambda_o) \cdot I =$
$= [\lambda_o^2 + 1 - (1 - \lambda_o) - \lambda_o] \cdot I = \lambda_o^2 \cdot I = (\lambda_o \cdot I)^2 = A^2$

επομένως $\text{adj}A = A^2$.

Γ120. Έστω Α, Β ν×ν πίνακες, τέτοιοι ώστε να είναι $B = I + A$. Να βρείτε την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι

$$B + B^2 + B^3 + \ldots + B^k = k \cdot I + \frac{k(k+1)}{2} A$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$

Θ.Ν.Καζαντζής

Λύση έστειλε ο Θ.Ν.Καζαντζής

Λύση :

Για $\varkappa = 1$, η σχέση

$$B + B^2 + \ldots + B^\varkappa = \varkappa \cdot I + \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2} \cdot A \quad (1)$$

ισχύει οπωσδήποτε αφού γίνεται $B = I + A$

Για $\varkappa = 2$, $(1) \Leftrightarrow B + B^2 = 2I + 3A \quad (2)$

Είναι όμως $B + B^2 = I + A + (I + A)^2 = \ldots = 2I + 3A + A^2$ και η (2) ισχύει μόνον όταν $A^2 = \mathbf{O}$.

Αντίστροφα, έστω ότι $A^2 = \mathbf{O}$, θα είναι τότε $A^\varrho = \mathbf{O}$, $\varrho = 2, 3, 4, \ldots$

Βρίσκουμε, λοιπόν $B^\varrho = (I + A)^\varrho = I + \varrho A \ \forall \varrho \in \mathbb{N}^*$ με $\varrho \geq 2$ οπότε είναι

$$\left.\begin{aligned} B &= I + A \\ B^2 &= I + 2A \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B^\varkappa &= I + \varkappa A \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $B + B^2 + \ldots + B^\varkappa = \varkappa \cdot I + (1 + 2 + \ldots + \varkappa) A = \varkappa I + \dfrac{\varkappa(\varkappa+1)}{2} A$

Τελικά η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η (1) είναι $A^2 = \mathbf{O}$.

Γ121. Έστω ν×ν πίνακας Α με στοιχεία ακέραιους αριθμούς, ώστε να ισχύει $|A| = 1$ και ο πίνακας $A^2 - I$ να είναι αντιστρέψιμος. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = |A + xI|$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

Αφού ο Α έχει στοιχεία ακέραιους αριθμούς, το P(x) έχει ακέραιους συντελεστές, οπότε οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου δηλαδή του $P(0) = |A| = 1$ επομένως οι 1, - 1.

Όμως $P(1)\cdot P(-1) = |A + I|\cdot|A - I| = |A^2 - I| \neq 0$ αφού ο $A^2 - I$ αντιστρέφεται.

Έτσι $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$ και P(x) δεν έχει ακέραια ρίζα.

Γ122. Έστω Α πίνακας τύπου ν×ν. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ν×ν πίνακας Β τέτοιος ώστε $AB = I - xB$, να αποδείξετε ότι ο ν είναι άρτιος.

Γ. Μαυρίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Έχουμε $AB = I - xB \Leftrightarrow (A + xI)\cdot B = I$ επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $A + xI$ αντιστρέφεται. Θέτοντας $f(x) = |A + xI|$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Όμως η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση ν- ου βαθμού και αφού δεν έχει ρίζα, ο ν είναι άρτιος.

Γ123. Αν για τους ν×ν πίνακες Α, Β ισχύουν οι σχέσεις $A^2+xI = xA+A$, $B^2+yI = yB+B$ και $A+B = AB$, ν.δ.ο. $x + y = xy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Η σχέση $A^2 + xI = xA + A$ γράφεται $A^2 - xA + xI - A = \mathbf{O}$ και τελικά

$(A - xI)(A - I) = \mathbf{O}$ (1)

Όμοια $B^2 + yI = yB + B \Leftrightarrow (B - yI)(B - I) = \mathbf{O}$ (2)

Όμως $A + B = AB \Leftrightarrow AB - A - B = \mathbf{O} \Leftrightarrow A(B - I) - (B - I) = I \Leftrightarrow (A - I)(B - I) = I$.

Έτσι οι A - I, B - I αντιστρέφονται και (1), (2) $\Rightarrow A = xI$, $B = yI$.

Η σχέση $A + B = AB$ γράφεται τώρα $xI + yI = xI \cdot yI \Leftrightarrow x + y = xy$.

Γ124. Έστω Α ν×ν αντιστρέψιμος με $(\mathrm{adj}A)^2 + (\mathrm{adj}A) + I = \mathbf{O}$. Να δειχθεί ότι: **i)** $|A| = 1$ **ii)** $|A + I| = 1$.

Π. Κουρσουμπάς

Λύση έστειλε ο Κουρσουμπάς Π.

Λύση :

i) Από $(\mathrm{adj}A)^2 + (\mathrm{adj}A) + I = \mathbf{O}$ παίρνουμε [πολ/ζοντας με adjA - I]:

$(\mathrm{adj}A)^3 - I = \mathbf{O}$ άρα

$$|\mathrm{adj}A|^3 = 1 \Leftrightarrow |\mathrm{adj}A| = 1 \Leftrightarrow \left||A|\cdot A^{-1}\right| = 1 \Leftrightarrow |A|^{\nu}\cdot\frac{1}{|A|} = 1 \Leftrightarrow |A|^{\nu-1} = 1 \quad (1)$$

Όμως $(\mathrm{adj}A)^2 + (\mathrm{adj}A) + \frac{1}{4}I = -\frac{3}{4}I \Leftrightarrow \left(\mathrm{adj}A + \frac{1}{2}I\right)^2 = -\frac{3}{4}I$

απ' όπου $\left|\mathrm{adj}A + \frac{1}{2}I\right|^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{\nu}$. Έτσι ν άρτιος οπότε ν - 1 περιττός και $(1) \Rightarrow |A| = 1$.

ii) Είναι $\mathrm{adj}A = |A|\cdot A^{-1} = A^{-1}$. Η αρχική σχέση γράφεται:

$(A^{-1})^2 + A^{-1} + I = \mathbf{O} \Leftrightarrow I + A + A^2 = \mathbf{O} \Leftrightarrow A + I = -A^2$ οπότε $|A+I| = (-1)^{\nu}|A|^2 = 1\cdot 1^2 = 1$.

Γ125. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\cdot\vec{\beta}$ δείξτε ότι ισχύει και $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\beta}|\cdot\vec{\beta}$

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ίσα ή αντίθετα, από τη σχέση

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\cdot\vec{\beta} \quad (1)$$

εύκολα προκύπτει ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{0}$. Επίσης αν κάποιο από τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι $\vec{0}$, τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι είναι και το άλλο.

Στις παραπάνω περιπτώσεις ισχύει $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\beta}|\cdot\vec{\beta}$

Έστω τώρα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}-\vec{\beta} \neq \vec{0}$. Από την (1) έχουμε $\vec{\beta} = \lambda\cdot\vec{\alpha}$ όπου θέσαμε

$\lambda = \dfrac{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}$. Προφανώς $\lambda > 0$.

Έτσι $(1) \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\lambda\vec{\alpha}|\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}-\lambda\vec{\alpha}|\cdot\lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow |1+\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\alpha} = |1-\lambda||\vec{\alpha}|\cdot\lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |1+\lambda| = |1-\lambda|\cdot\lambda$.

Όμως $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda + 1 > 0$ οπότε $1 + \lambda = |1 - \lambda|\cdot\lambda$

Επομένως: $\begin{cases} 1+\lambda = \lambda(1-\lambda), \text{ αν } 0 < \lambda \leq 1 \\ \text{ή} \\ 1+\lambda = \lambda(\lambda-1), \text{ αν } \lambda \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = -1 \text{ αδύνατη} \\ \text{ή} \\ \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0,\ \lambda \geq 1 \end{cases}$

Από τη δεύτερη εξίσωση και αφού $\lambda \geq 1$, είναι $\lambda = \sqrt{2}+1$.

Τελικά $\vec{\beta} = (\sqrt{2}+1)\vec{\alpha}$ οπότε:

$$|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}+2(\sqrt{2}+1)\vec{\alpha}|\cdot\vec{\alpha} = |(3+2\sqrt{2})\vec{\alpha}|\cdot\vec{\alpha} = |(\sqrt{2}+1)^2\cdot\vec{\alpha}|\cdot\vec{\alpha} =$$

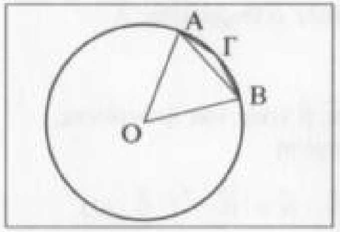
$$= |(\sqrt{2}+1)\vec{\alpha}|\cdot(\sqrt{2}+1)\vec{\alpha} = |\vec{\beta}|\cdot\vec{\beta}$$

Γ126. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R και τα σημεία του Α, Β, Γ τέτοια ώστε να ισχύει $\sqrt{3}\,\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

α) Να δειχθεί ότι το Γ είναι το μέσο του κυρτού τόξου ΑΒ.

β) Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Π. Μυταρέλλης



Λύση έστειλαν οι: Μυταρέλλης Π., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

α) Είναι $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O\Gamma}| = R$.

Τα Α, Β είναι διακεκριμένα σημεία διαφορετικά $\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{O\Gamma} = 2\cdot\overrightarrow{OB}$ άρα $\sqrt{3}\cdot|\overrightarrow{O\Gamma}| = 2\cdot|\overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot R = 2R$, άτοπο.

Ακόμη $\overrightarrow{O\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB}$ με $\frac{1}{\sqrt{3}} > 0$,

οπότε το Γ είναι εσωτερικό σημείο

της κυρτής γωνίας των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

Έχουμε τώρα

$$\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(R^2 - R^2\right) = 0$$

οπότε $\overrightarrow{O\Gamma} \perp \overrightarrow{AB}$. Έτσι, το Γ είναι το μέσο του τόξου ΑΒ.

β) Έστω $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \varphi$. Από $\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ παίρνουμε

$$\sqrt{3}^2\cdot\overrightarrow{O\Gamma}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 \Leftrightarrow 3\cdot R^2 = 2R^2 + 2R^2\cdot\text{συν}\varphi \Leftrightarrow \text{συν}\varphi = \frac{1}{2}$$

Έτσι η κυρτή γωνία των ΟΑ, ΟΒ είναι 60° επομένως $\widehat{B\Gamma A} = 150^\circ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι $\widehat{A} = \widehat{B} = 15^\circ$

Γ127. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $1+\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0$ και $1+\vec{\beta}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\vec{\gamma} = 0$

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$, **ii)** $|\vec{\gamma}| < 2$

Γ. Μαυρίδης

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

i) Αφού $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$

θα είναι $\vec{\alpha}\vec{\beta} \neq \pm 1$ (1)

Έστω $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$. Από τις σχέσεις

$1 + \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0$, (2) και

$1 + \vec{\beta}\vec{\alpha} + \vec{\beta}\vec{\gamma} = 0$, βρίσκουμε

$\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \vec{\beta}\vec{\gamma} \Leftrightarrow \kappa\vec{\alpha}^2 + \lambda\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) = \kappa\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) + \lambda\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \kappa - \kappa\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) + \lambda\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) - \lambda = 0 \Leftrightarrow$
$(\kappa - \lambda)\left(1 - \vec{\alpha}\vec{\beta}\right) = 0$ και λόγω της (1): $\kappa = \lambda$.

Έτσι $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ οπότε: (2) $\Leftrightarrow 1+\vec{\alpha}\vec{\beta}+\kappa\vec{\alpha}^2+\kappa\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(1+\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)(1+\kappa) = 0$
και λόγω της (1): $\kappa = -1$. Τελικά $\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$

ii) Θα είναι $|\vec{\gamma}| = |-\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow |\vec{\gamma}| \leq 2$

Αν ίσχυε $|\vec{\gamma}| = 2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, άτοπο αφού τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Τελικά $|\vec{\gamma}| < 2$.

Γ128. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (μη μηδενικά) τέτοια ώστε

$\frac{\pi}{2} \leq \left(\widehat{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}, \vec{\alpha}+2\vec{\beta}}\right) \leq \frac{3\pi}{2}$ και

$\frac{\pi}{2} \leq \left(\widehat{\vec{\beta}\ , 5\vec{\beta}-2\vec{\alpha}}\right) \leq \frac{3\pi}{2}$

Γ. Μαυρίδης

Λύση έστειλαν οι: Θαρραλίδης Λ., Τσιτσίνιας Γ.

Λύση :

Έστω ότι υπάρχουν τέτοια διανύσματα.

Είναι συν$\left(\widehat{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}, \vec{\alpha}+2\vec{\beta}}\right) \leq 0$ αφού

$$\left(\widehat{\vec{\alpha}-2\vec{\beta}, \vec{\alpha}+2\vec{\beta}}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Έτσι: $\frac{\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)}{|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}||\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\beta}^2 \leq 0$ (1)

Όμοια, παίρνουμε $\vec{\beta}\left(5\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 5\vec{\beta}^2 - 2\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right) \leq 0$ (2)

Προσθέτοντας (1) και (2): $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$, άτοπο αφού τότε

$$\left(\widehat{\vec{\beta}, 5\vec{\beta}-2\vec{\alpha}}\right) = \left(\widehat{\vec{\alpha}, 3\vec{\alpha}}\right) = 0 \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Γ129. Έστω ότι για τα συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις
$\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\vec{\gamma} = \left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\vec{\alpha} = \left(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}$,
$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$.

Αν Ο σημείο του χώρου και θέσουμε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$, δείξτε ότι: το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο.

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλαν οι: Άγγελος Γάκης (μαθητής), Θαρραλίδης Λ.

Λύση 1η:

Δίνεται ότι:

$\vec{\alpha}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\alpha}\vec{\gamma} = \vec{\beta}\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\vec{\gamma} = c$.

Τότε: $\begin{cases} \vec{\alpha}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\vec{\gamma} = c \\ \vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\alpha}\vec{\gamma} = c \\ \vec{\beta}\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\vec{\gamma} = c \end{cases}$ και προσθέτοντας:

$0 = 3c$ άρα $c = 0$.

Έτσι, βρήκαμε ότι: $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\gamma} = \vec{\gamma}\vec{\alpha}$, (1)

Επιπλέον, ισχύει $\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ οπότε η (1) δίνει:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\gamma}\\ \vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\vec{\gamma}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}\vec{\beta} = -\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2\\ \vec{\alpha}\vec{\beta} = -\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{\beta}^2 = -2\vec{\alpha}\vec{\beta}\\ \vec{\alpha}^2 = -2\vec{\alpha}\vec{\beta}\end{array}\right\} \text{ άρα } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$$

Όμοια, βρίσκουμε $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ και τελικά $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$.

Έτσι: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$ (2) και $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O\Gamma}|$ (3)

Από την (2) συμπεραίνουμε ότι το Ο είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ από την (3) το Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου. Αφού το βαρύκεντρο συμπίπτει με το περίκεντρο, το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

Λύση 2η:

Δίνεται: $\vec{\alpha}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\vec{\gamma} = \vec{\beta}\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\vec{\alpha} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\gamma} = -\vec{\beta}^2$ αφού $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = -\vec{\beta}$.

Έτσι: $|\overrightarrow{A\Gamma}|^2 = |\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA}|^2 = (\vec{\gamma} - \vec{\alpha})^2 = \ldots = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2$.

Όμοια: $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{B\Gamma}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$
και το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

Γ130. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του επιπέδου. Δείξτε ότι: υπάρχουν δύο τιμές του πραγματικού x, έτσι ώστε

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + x^2\vec{\beta}) = \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(x\vec{\alpha} + \vec{\beta})$$

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Από τη γνωστή σχέση

$\pi\rho o\beta_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\cdot\vec{v}$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + x^2\vec{\beta}) = \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}(x\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \Leftrightarrow \frac{(\vec{\alpha} + x^2\vec{\beta})\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\beta} = \frac{(x\vec{\alpha} + \vec{\beta})\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\cdot\vec{\beta}$$

$$\overset{\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} (\vec{\alpha} + x^2\vec{\beta})\cdot\vec{\beta} = (x\vec{\alpha} + \vec{\beta})\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} + x^2\vec{\beta}^2 = x(\vec{\alpha}\vec{\beta}) + \vec{\beta}^2 \quad (1)$$

Είναι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ άρα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \sigma\upsilon\nu\varphi$ όπου $\varphi = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

Έτσι (1) $\Leftrightarrow x^2 - x\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi - 1 = 0$, απ' όπου βρίσκουμε $x_1 = 1$, $x_2 = \sigma\upsilon\nu\varphi - 1$.

Γ131. Δίνονται τα μη μηδενικά $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}\vec{\beta})^3 = e^{1-\vec{\alpha}\vec{\beta}}$.
Αν για διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύει

$$\vec{\alpha}[\vec{\beta}(\vec{x} - \vec{\alpha})] = \vec{x} - \vec{\beta}(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})$$

Να δειχθεί ότι $\vec{x} = \dfrac{1}{|\vec{\beta}|^2}\cdot\vec{\beta}$.

Κ. Τσέλιος

Λύση έστειλε ο Τσέλιος Κ.

Λύση :

Θεωρώ $f(x) = x^3 - e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f(1) = 0$ και $f'(x) = 3x^2 + e^{1-x} > 0$ άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι: $x^3 = e^{1-x} \Leftrightarrow x = 1$, άρα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1$.

Η δοσμένη σχέση γράφεται: $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{x} - 1) = \vec{x} - \vec{\beta}(\vec{x}\vec{\alpha}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{x}) - \vec{\alpha} = \vec{x} - \vec{\beta}(\vec{x}\vec{\alpha})$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με $\vec{\beta}$:

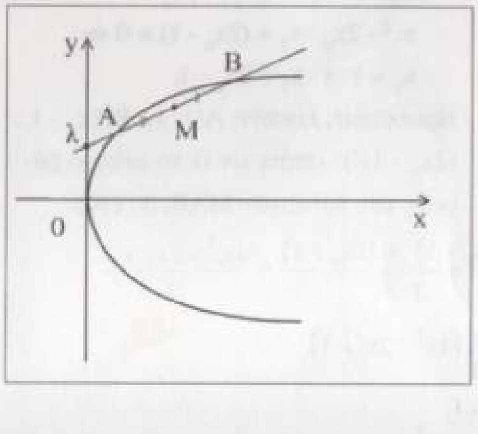
$$(\vec{\beta}\vec{\alpha})(\vec{\beta}\vec{x}) - (\vec{\beta}\vec{\alpha}) = \vec{\beta}\vec{x} - \vec{\beta}^2(\vec{x}\vec{\alpha}) \Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{x} - 1 = \vec{\beta}\vec{x} - \vec{\beta}^2(\vec{x}\vec{\alpha}) \Leftrightarrow \vec{x}\vec{\alpha} = \frac{1}{|\vec{\beta}|^2} \quad (2)$$

Όμοια πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\vec{\alpha}$, θα βρούμε: $\vec{\beta}\vec{x} = 1$ (3)

Έτσι λόγω των (2), (3), η (1) γράφεται: $\vec{\alpha} - \vec{\alpha} = \vec{x} - \vec{\beta}\cdot\dfrac{1}{|\vec{\beta}|^2} \Leftrightarrow \vec{x} = \dfrac{1}{|\vec{\beta}|^2}\cdot\vec{\beta}$

Γ132. Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $y = \lambda x + \lambda$ με $\lambda > 0$. Να βρεθεί η καμπύλη στην οποία κινούνται τα μέσα των χορδών ΑΒ της παραβολής όπου Α, Β τα σημεία που τέμνει η ευθεία την παραβολή.

Π. Κουρσουμπάς



Λύση έστειλε ο Κουρσουμπάς Π.

Λύση :

Η ευθεία (ε): $y = \lambda x + \lambda$ τέμνει την (c): $y^2 = 4x$ όταν το σύστημα

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \lambda x + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x + \lambda \\ (\lambda x + \lambda)^2 = 4x \end{cases} \quad (1)$$

έχει δύο λύσεις, δηλ. όταν η διακρίνουσα της (1) είναι θετική.

Όμως (1) $\Leftrightarrow \lambda^2x^2 + (2\lambda^2 - 4)x + \lambda^2 = 0$ (2)

και $\Delta > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1$, αφού $\lambda > 0$.

Είναι $x_A + x_B = \dfrac{-(2\lambda^2 - 4)}{\lambda^2} \Rightarrow$

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2}{\lambda^2} - 1$ και

$y_M = \lambda\cdot x_M + \lambda = \ldots = \dfrac{2}{\lambda}$

Έτσι $\lambda = \frac{2}{y_M}$ οπότε $x_M = \frac{2}{\left(\frac{2}{y_M}\right)^2} - 1 \Leftrightarrow y_M^2 = 2\left(x_M + 1\right)$

και το Μ κινείται στην παραβολή $y^2 = 2(x+1)$.

Γ133. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει: $f(0) = 0$ και $f(\alpha) - f(\beta) \geq \alpha^2 - \beta^2$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει: $f(x) = x^2$

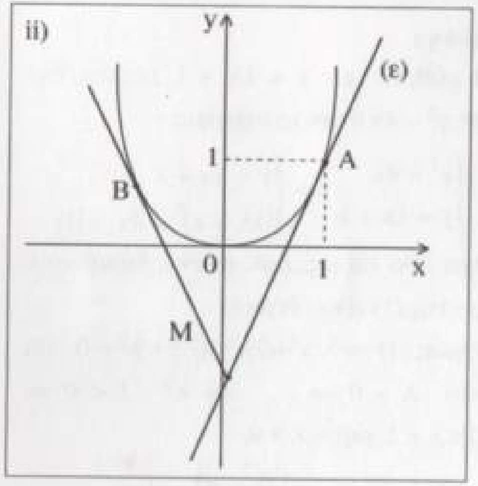
ii) Από σημείο $M(x_o, y_o)$ της ευθείας (ε): $2x - y = 1$ φέρνουμε τις εφαπτομένες στη γραφική παράσταση της f(x) και έστω Α, Β τα σημεία επαφής. Δείξτε ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΜΑΒ βρίσκεται σε παραβολή.

Κ. Παπακώστας

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

i) Έστω $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι $f(\alpha) - \alpha^2 \geq f(\beta) - \beta^2 \Leftrightarrow g(\alpha) \geq g(\beta)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Για $\alpha = x$, $\beta = 0$: $g(x) \geq g(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ενώ για $\alpha = 0$, $\beta = x$: $g(0) \geq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Έτσι $g(x) = g(0)$, δηλ. $f(x) - x^2 = f(0) - 0$, $x \in \mathbb{R}$ και αφού $f(0) = 0$: $f(x) = x^2$ που είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x$.



ii) Η (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο A(1, 1). Έστω $M(x_o, 2x_o - 1)$ σημείο της (ε) και $B(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της δεύτερης εφαπτομένης (ε') από το Μ στην C_f.

Είναι (ε'): $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$ και αφού διέρχεται από το Μ:

$$2x_o - 1 - x_1^2 = 2x_1 x - 2x_1^2 \Leftrightarrow$$
$$x_1^2 - 2x_o \cdot x_1 + (2x_o - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = 1 \ \text{ή} \ x_1 = 2x_o - 1.$$

Βρίσκουμε, λοιπόν: A(1, 1), $B(2x_o - 1, (2x_o - 1)^2)$ οπότε αν G το κέντρο βάρους του τριγώνου ΜΑΒ, θα είναι:

$$x_G = \frac{1 + (2x_o - 1) + x_o}{3} = x_o, \quad y_G = \frac{1 + (2x_o - 1)^2 + (2x_o - 1)}{3} = \frac{4x_o^2 - 2x_o + 1}{3}$$

οπότε το G κινείται στην παραβολή $y = \frac{1}{3}\left(4x^2 - 2x + 1\right)$

Γ134. Δίνεται η γραμμή

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \ \alpha, \beta > 0,$$

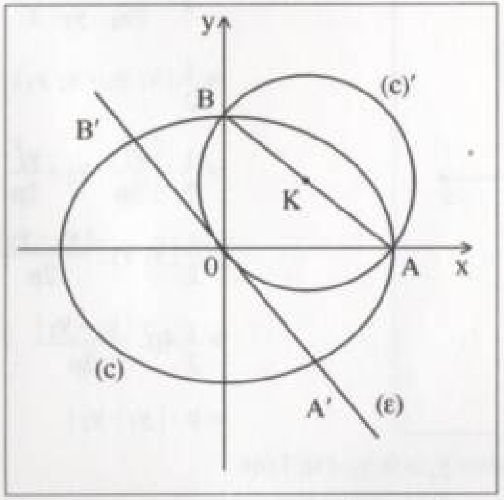
και έστω Α, Β τα σημεία τομής της με τους ημιάξονες Ox, Oy αντίστοιχα. Θεωρούμε τον κύκλο C', διαμέτρου AB. Η εφαπτομένη του C' στην αρχή των αξόνων, τέμνει την C στα A', B'.

α) Δείξτε ότι $(A'B')^2 \leq 2(AB)^2$

β) Εξετάστε πότε ισχύει

$$(A'B')^2 = 2(AB)^2$$

Λ. Θαρραλίδης



Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

α) Είναι A(α, 0), B(0, β), $K\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

οπότε $(AB)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ και

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$$

Έτσι: $(C'): \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$

Η εξίσωση της (ε) είναι:

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)\left(0 - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$$

δηλαδή (ε): $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$.

Από τη λύση του συστήματος των (ε), (C) βρίσκουμε:

$$A'\left(\frac{\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4}}, -\frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4}}\right) \ \text{και}$$

$$B'\left(-\frac{\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4}}, \frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^4 + \beta^4}}\right)$$

Έτσι: $(A'B')^2 = \ldots = 4\frac{\alpha^2\beta^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}{\alpha^4 + \beta^4}$ συνεπώς

$$\frac{(A'B')^2}{(AB)^2} = \frac{4 \cdot \alpha^2\beta^2}{\alpha^4 + \beta^4} = 2\frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha^4 + \beta^4} \leq 2 \cdot 1 = 2, \ \text{αφού} \ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \ \ \forall x, y > 0.$$

Τελικά: $\frac{(A'B')^2}{(AB)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (A'B')^2 \leq 2(AB)^2$

β) Ισχύει όταν $\frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha^4 + \beta^4} = 1 \Leftrightarrow \left(\alpha^2 - \beta^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ δηλαδή όταν η (C) είναι κύκλος.

Γ135. Έστω η παραβολή C: $y^2=2px$, $p>0$ και τα μεταβλητά της σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, με $A\hat{O}B=90^o$, όπου O η αρχή των αξόνων.

α) Δείξτε ότι: $E_{(OAB)} = p \cdot |y_1 - y_2|$

β) Βρείτε τα Α, Β για τα οποία το $E_{(OAB)}$ γίνεται ελάχιστο.

Λ. Θαρραλίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

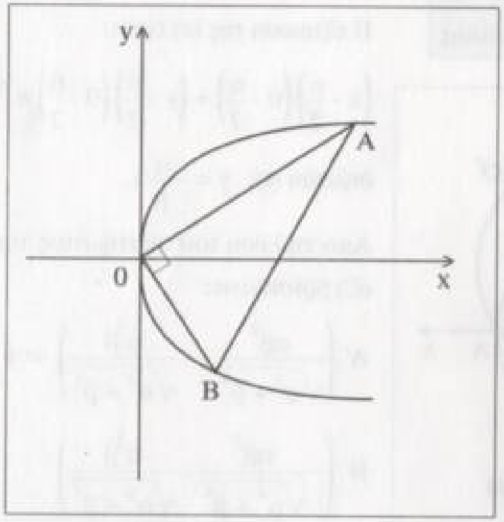
Λύση :

α) Προφανώς $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$.

Ακόμη $\lambda_{OA} \cdot \lambda_{OB} = -1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -1$

$$\Leftrightarrow y_1 y_2 = -\frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p}$$

απ' όπου $y_1 y_2 = -4p^2$ (1)



$$\text{Έτσι: } E_{(OAB)} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} | x_1 y_2 - x_2 y_1 |$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{y_1^2}{2p} \cdot y_2 - \frac{y_2^2}{2p} \cdot y_1 \right|$$

$$= \frac{1}{2} | y_1 y_2 | \frac{| y_1 - y_2 |}{2p}$$

$$= \frac{1}{2} 4p^2 \frac{| y_1 - y_2 |}{2p}$$

$$= p \cdot | y_1 - y_2 |$$

β) Από (1) $\Rightarrow y_1 y_2 < 0$. Έστω, λοιπόν $y_1 > 0$, $y_2 < 0$. Τότε

$$| y_1 - y_2 | = y_1 - y_2 = y_1 + \frac{4p^2}{y_1}, \text{ λόγω της (1)}$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(t) = t + \frac{4p^2}{t}$, $t > 0$ βρίσκουμε

$$f'(t) = 1 - \frac{4p^2}{t^2} = \frac{t^2 - 4p^2}{t^2}, \ t > 0 \text{ και ολικό ελάχιστο στο } (0, +\infty) \text{ για } t = 2p.$$

Έτσι το ελάχιστο εμβαδό προκύπτει για $y_1 = 2p$

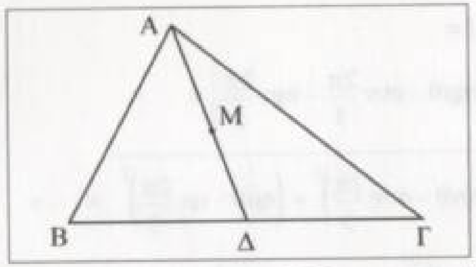
Βρίσκουμε $A(2p, 2p)$, $B(2p, -2p)$ και $E_{min} = 4p^2$.

Γ136. Να εξεταστεί αν το σημείο M(3, 7) βρίσκεται μέσα ή έξω από το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,8), Β(2,3), Γ(6, 6).

Ν. Ιωσηφίδης

Λύση έστειλε ο Ιωσηφίδης Ν.

Λύση :



Έστω Μ το σημείο τομής της ΑΜ με την ΒΓ.

$$\text{Είναι (AM): } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (ΑΜ): $x + 2y - 17 = 0$

Όμοια (ΒΓ): $-3x + 4y - 6 = 0$

Από το σύστημα των εξισώσεων των ΑΜ, ΒΓ: $\Delta\left(\frac{56}{10}, \frac{57}{10}\right)$.

Επειδή $x_B < x_\Delta < x_\Gamma$ το Δ βρίσκεται μεταξύ των Β, Γ και επειδή $x_A < x_M < x_\Delta$ το Μ βρίσκεται μεταξύ των Α, Δ. [Βλ. άσκηση Α46]. Έτσι το Μ βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Ο κ.Ν. Ιωσηφίδης έχει προτείνει δύο ακόμη λύσεις. Επειδή το θέμα κρίθηκε ενδιαφέρον και αξίζει γενικότερης αντιμετώπισης, θα αποτελέσει αντικείμενο ιδιαίτερου άρθρου από τον κ. Ν. Ιωσηφίδη, σε κάποιο από τα προσεχή τεύχη του περιοδικού.

Γ137. Αν z_1, z_2, z_3 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^3 = 1$ και Α, Β, Γ οι εικόνες των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο με $Argz_1 < Argz_2 < Argz_3$. Έστω C ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του κυρτού τόξου ΑΒ ισχύει ΜΓ = ΜΑ + ΜΒ.

Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλε Μυταρέλλης Π.

Λύση :

Είναι $z^3 = 1 \Leftrightarrow z = \sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{3}$, $\kappa = 0, 1, 2$. Αφού $Argz_1 < Argz_2 < Argz_3$ θα είναι

$$z_1 = 1, \ z_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3},$$

$$z_3 = \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi}{3}.$$

Έστω M(z) όπου $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$ με $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$ αφού το Μ είναι σημείο του κυρτού τόξου ΑΒ. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{M\Gamma}\right| = | z - z_3 | = \left| \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} - i\eta\mu\frac{4\pi}{3} \right| =$$

$$= \sqrt{\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(\eta\mu\theta - \eta\mu\frac{4\pi}{3}\right)^2} = \ldots = \sqrt{4\eta\mu^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} =$$

$$= -2\eta\mu\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)$$

Ακόμη: $\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| = |z - z_1| + |z - z_2| =$

$$= |\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta - 1| + \left|\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} - i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right| =$$

$$= \sqrt{(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)^2 + \eta\mu^2\theta} + \sqrt{\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\eta\mu\theta - \eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)^2} = \ldots =$$

$$= 2\eta\mu\frac{\theta}{2} - 2\eta\mu\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\eta\mu\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\right) = \left|\overrightarrow{M\Gamma}\right|.$$ Τελικά $MA + MB = M\Gamma$

Γ138. Να λυθεί στο C η εξίσωση

$$|z^\nu| + |z|^2 + 2z^\nu = 0$$

Χ. Πατήλας

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται $|z|^\nu + |z|^2 = -2z^\nu$ άρα για κάθε $z \in C$ που είναι λύση της, θα έχουμε: $|z|^\nu + |z|^2 = 2|z|^\nu \Leftrightarrow |z|^\nu = |z|^2 \Leftrightarrow |z| = 0$ ή $|z| = 1$ ή $\nu = 2$.

- Αν $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- Αν $|z| = 1$, η αρχική εξίσωση γράφεται: $z^\nu = -1 \Leftrightarrow z^\nu = \sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi$ άρα

$$z = \sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi + \pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + \pi}{\nu}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$$

- Αν $\nu = 2$, η αρχική εξίσωση γίνεται: $2|z|^2 + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + |z|^2 = 0$.

Θέτοντας $z = x + yi$ είναι $(x + yi)^2 + (x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 0 \\ \text{και} \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, \; y \in \mathbb{R}.$$ Έτσι $z = yi$, $y \in \mathbb{R}$

Γ139. Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $|z_1 + z_2| = 1$.

Να δειχθεί ότι $\mathrm{Re}\left(z_1 \cdot \overline{z_2}\right) \leq \frac{1}{4}$.

Π. Μυταρέλλης

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

Είναι: $\mathrm{Re}\left(z_1 \overline{z_2}\right) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$4\mathrm{Re}\left(z_1 \overline{z_2}\right) \leq |z_1 + z_2|^2$ (αφού $|z_1 + z_2| = 1$) $\Leftrightarrow$

$2\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) \leq |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow$

$0 \leq |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow 0 \leq |z_1 - z_2|$, που ισχύει.

Γ140. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει

$(w - 1)(z + 1) = |w - 1||z - 1| + \sqrt{2}|w + 1|$.

α) Αν η εικόνα του z κινείται στον δεξιό κλάδο της υπερβολής $2x^2 - 2y^2 = 1$ να δειχθεί ότι $w \in I$.

β) Αν $|z| = |w| = 1$ και $z, w \notin \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι $wz = -1$.

Χ. Πατήλας

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Δίνεται ότι:

$(w - 1)(z + 1) = |w - 1||z - 1| + \sqrt{2}|w + 1|$ (1)

α) Η υπερβολή γράφεται:

$\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ και έχει $\alpha^2 = \frac{1}{2} = \beta^2$

άρα $\gamma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Έτσι $\gamma = 1$ και οι εστίες είναι E(1, 0), E′(- 1, 0). Αν M η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, θα είναι $(ME') - (ME) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}$ από τον ορισμό της υπερβολής, δηλαδή $|z + 1| - |z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 1| = |z + 1| - \sqrt{2}$.

Έτσι: (1) $\Leftrightarrow (w - 1)(z + 1) = |w - 1||z + 1| - \sqrt{2}\left(|w - 1| - |w + 1|\right) \Leftrightarrow$

$(w - 1)(z + 1) = |(w - 1)\cdot(z + 1)| - \sqrt{2}\left(|w - 1| - |w + 1|\right)$ (2)

Το δεύτερο μέλος της (2) (άρα και το πρώτο) είναι πραγματικός αριθμός. Έτσι $(w - 1)(z + 1) = \varrho \geq 0$ συνεπώς $|(w - 1)(z + 1)| = |\varrho| = \varrho$.

Η (2) γράφεται: $\varrho = \varrho - \sqrt{2}\left(|w - 1| - |w + 1|\right) \Leftrightarrow |w - 1| = |w + 1| \Leftrightarrow$

$|w - 1|^2 = |w + 1|^2 \Leftrightarrow (w - 1)(\overline{w} - 1) = (w + 1)(\overline{w} + 1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$w + \overline{w} = 0 \Leftrightarrow w \in I$.

β) Από την (1) έχουμε: $(w - 1)(z + 1) \in \mathbb{R}$ δηλαδή $(w - 1)(z + 1) = (\overline{w} - 1)(\overline{z} + 1)$ (3)

Όμως $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ και όμοια $\overline{w} = \frac{1}{w}$. Η (3) μετά τις πράξεις γίνεται:

$wz - z + w = \dfrac{1 - w + z}{wz} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (wz + 1)(z + 1)(w - 1) = 0$ και αφού $z + 1$, $w - 1 \neq 0$ (δίνεται ότι $z, w \notin \mathbb{R}$) συμπεραίνουμε ότι: $wz + 1 = 0 \Leftrightarrow wz = -1$.

Γ141. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύουν $|z| = 1$ και $(\overline{z})^{1997} + 3z + 2i = 0$.

Ο. Μοσχίδης

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Είναι $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$

και η εξίσωση $(\overline{z})^{1997} + 3z + 2i = 0$ γράφεται:

$$3z^{1998} + 2i \cdot z^{1997} + 1 = 0 \text{ οπότε } z^{1997}(3z + 2i) = -1$$

άρα και $|z|^{1997} \cdot |3z + 2i| = |-1| \Leftrightarrow |3z + 2i| = 1$ για κάθε $z \in C$ που είναι λύση της εξίσωσης. Θέτοντας $z = x + yi$ είναι $3z + 2i = 3x + (3y + 2)i$.

Από το σύστημα $\begin{cases} |z| = 1 \\ |3z + 2i| = 1 \end{cases}$ βρίσκουμε $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ (3x)^2 + (3y + 2)^2 = 1 \end{cases}$

και τελικά $y = -1$ οπότε $(1) \Leftrightarrow x = 0$.

Έτσι: $\mathbf{z = -i}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης αφού την επαληθεύει

$$[3(-i)^{1998} + 2i(-i)^{1997} + 1 = 3(-1) + 2i(-1) + 1 = -3 + 2 + 1 = 0].$$

Γ142. Δίνεται το πολυώνυμο f(z) με πραγματικούς συντελεστές ώστε για κάθε $z \in C$ να ισχύει: $f(z) - f(iz) = 2z^2$ και $f(z) + f(-z) = 2z^4 + 2z^2 + 2$

α) Να βρεθεί το f(z).

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = 0$.

Χ. Πατήλας

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

α) Δίνεται ότι $f(z) - f(iz) = 2z^2$ (1) $\forall z \in C$. Θέτοντας στην (1) το iz στη θέση του z, παίρνουμε:

$f(iz) - f(-z) = -2z^2$ (2) $\forall z \in C$. Προσθέτουμε τις (1), (2) οπότε

$f(z) - f(-z) = 0 \Leftrightarrow f(-z) = f(z)$ $\forall z \in C$.

Η σχέση $f(z) + f(-z) = 2(z^4 + z^2 + 1)$ γράφεται τώρα $2f(z) = 2(z^4 + z^2 + 1)$ οπότε $f(z) = z^4 + z^2 + 1$, $z \in C$

β) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow w^2 + w + 1 = 0$, όπου $w = z^2$ (3)

Βρίσκουμε $(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0 \Leftrightarrow w^3 = 1$ και λύσεις είναι οι τρίτες ρίζες της μονάδας, εκτός του 1.

Δηλαδή $w_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}$ ή $w_2 = \text{συν}\frac{4\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{4\pi}{3}$

Όμως $w_1 = \left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)^2$ οπότε $(3) \Leftrightarrow z_1 = \text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{4\pi}{3}$,

$z_2 = -\text{συν}\frac{\pi}{3} - i\text{ημ}\frac{\pi}{3}$. Ανάλογα, αφού $w_2 = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)^2$ παίρνουμε

$(3) \Leftrightarrow z_3 = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}$, $z_4 = -\text{συν}\frac{2\pi}{3} - i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}$

Γ143. Αν $z^{\nu} = 1$ με $z \in C$ και δειγματικός χώρος $\Omega = \{z_o, z_1, \ldots, z_{\nu-1}\}$ το σύνολο των ριζών της εξίσωσης και η συνάρτηση πιθανότητας

$$P(z_\kappa) = \text{Arg}(2 - z_\kappa) + 2\text{Re}\left(z_1^{\kappa}\right) + \frac{1}{4} z_1^{\kappa} \cdot \overline{z_\kappa}$$

με $P: \Omega \to [0, 1]$, να βρεθεί ο $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Κ. Τσέλιος

Λύση έστειλε ο Τσέλιος Κ.

Λύση :

Είναι $z_1^{\kappa} = z_\kappa$ άρα $P(z_\kappa) = \text{Arg}(2 - z_\kappa) + 2\text{Re}(z_\kappa) + \frac{1}{4} z_\kappa \cdot \overline{z_\kappa}$, δηλαδή

$$P(z_\kappa) = \text{Arg}(2 - z_\kappa) + z_\kappa + \overline{z_\kappa} + \frac{1}{4}|z_\kappa|^2 =$$

$$= \text{Arg}(2 - z_\kappa) + z_\kappa + \overline{z_\kappa} + \frac{1}{4}$$

Αφού η P είναι συνάρτηση πιθανότητας, θα ισχύει:

$$P(z_o) + P(z_1) + P(z_2) + \ldots + P(z_{\nu-1}) = 1 \qquad (1)$$

Όμως
$$\left.\begin{aligned} P(z_o) &= \text{Arg}(2 - z_o) + z_o + \overline{z_o} + \frac{1}{4} \\ P(z_1) &= \text{Arg}(2 - z_1) + z_1 + \overline{z_1} + \frac{1}{4} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(z_{\nu-1}) &= \text{Arg}(2 - z_{\nu-1}) + z_{\nu-1} + \overline{z_{\nu-1}} + \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις, λόγω της (1), έχουμε:

$$1 = \text{Arg}\left[(2 - z_o)(2 - z_1)\cdots(2 - z_{\nu-1})\right] + (z_o + z_1 + \cdots + z_{\nu-1}) + (\overline{z_o} + \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_{\nu-1}}) + \nu \cdot \frac{1}{4} \quad (2)$$

Αλλά $(z - z_o)(z - z_1)\ldots(z - z_{\nu-1}) = z^{\nu} - 1$ οπότε $(2 - z_o)(2 - z_1)\ldots(2 - z_{\nu-1}) = 2^{\nu} - 1$

Ακόμη: $z_o + z_1 + \cdots + z_{\nu-1} = 0$ και φυσικά $\overline{z_o} + \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_{\nu-1}} = 0$.

Έτσι: $(2) \Leftrightarrow 1 = \text{Arg}(2^{\nu} - 1) + \frac{\nu}{4} \Leftrightarrow 1 = 0 + \frac{\nu}{4} \Leftrightarrow \nu = 4$,

αφού $(2^{\nu} - 1) \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Arz}(2^{\nu} - 1) = 0$.

Γ144. α) Έστω z, z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε να είναι

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} = 0$$

Να δείξετε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ με $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ τέτοιοι ώστε να είναι

$$z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2.$$

β) Να δείξετε ότι τα σημεία z, z_1, z_2 του μιγαδικού επιπέδου είναι συνευθειακά.

Θ.Ν.Καζαντζής

Λύση έστειλε ο Θ.Ν. Καζαντζής

Λύση :

α) Έχουμε: $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{|z - z_1|^2} + \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{|z - z_2|^2} = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$$\overline{z}\left(\frac{1}{|z - z_1|^2} + \frac{1}{|z - z_2|^2}\right) = \frac{\overline{z_1}}{|z - z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z - z_2|^2}$$

και εξισώνοντας τους συζυγείς των δύο μελών:

$$z\left(\frac{1}{|z-z_1|^2}+\frac{1}{|z-z_2|^2}\right)=\frac{1}{|z-z_1|^2}z_1+\frac{1}{|z-z_2|^2}z_2 \quad (1)$$

Θέτοντας $\varrho=\frac{1}{|z-z_1|^2}+\frac{1}{|z-z_2|^2}$, $\lambda_1=\frac{1}{\varrho\cdot|z-z_1|^2}$, $\lambda_2=\frac{1}{\varrho\cdot|z-z_2|^2}$

η (1) γράφεται: $z=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2$ όπου $\lambda_1, \lambda_2>0$ και

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{|z-z_1|^2}+\frac{1}{|z-z_2|^2}\right)=\frac{1}{\varrho}\cdot\varrho=1$$

β) Έστω $A(z)$, $B(z_1)$, $\Gamma(z_2)$ και O η αρχή του μιγαδικού επιπέδου. Η σχέση $z=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2$ γράφεται $\overrightarrow{OA}=\lambda_1\overrightarrow{OB}+\lambda_2\overrightarrow{O\Gamma}$ και αφού $\lambda_2=1-\lambda_1$:

$\overrightarrow{OA}=\lambda_1\overrightarrow{OB}+(1-\lambda_1)\overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}=\lambda_1\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma A}=\lambda_1\overrightarrow{\Gamma B},\ \lambda>0 \Leftrightarrow$ A, B, Γ συνευθειακά.

Γ145. Ο μηχανισμός ενός θησαυροφυλακίου αποτελείται από 3 τροχούς, ο καθένας από τους οποίους μπορεί να βρίσκεται σε 8 διαφορετικές θέσεις. Λόγω ατέλειας του μηχανισμού η πόρτα ανοίγει αν οποιοιδήποτε 2 από τους 3 τροχούς βρεθούν στη σωστή θέση. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός συνδυασμών οι οποίοι πρέπει να δοκιμαστούν για να είμαστε σίγουροι ότι το θησαυροφυλάκιο θα ανοίξει;
(Α. Γερμανία 1988 για Δ.Μ.Ο.)

Σ. Σκοτίδας

Λύση έστειλε ο Σκοτίδας Σ.

Λύση :

Όταν ο μηχανισμός δούλευε κανονικά, υπήρχαν $8^3=512$ δυνατοί συνδυασμοί: Έστω A, B, Γ οι τροχοί και 1, 2, . . . , 8 οι δυνατές θέσεις του καθενός. Υποθέτουμε ότι ο αρχικός σωστός συνδυασμός ήταν $A\to 1$, $B\to 2$, $\Gamma\to 3$.

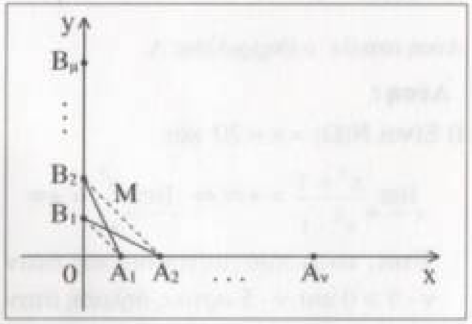
Τώρα, η πόρτα ανοίγει με δύο από τους τρεις τροχούς στη σωστή θέση και τον τρίτο οπουδήποτε. Έστω ότι οι A, B βρίσκονται στη σωστή θέση: $A\to 1$, $B\to 2$. Ο Γ μπορεί να βρίσκεται στις θέσεις 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 (αφήνουμε προς το παρόν τη "σωστή" θέση 3). Έτσι, προκύπτουν 7 νέοι συνδυασμοί ανοίγματος της πόρτας.

Όμως έχουμε $\binom{3}{2}$ τέτοια "σωστά" ζεύγη τροχών [είναι επίσης τα $A\to 1$, $\Gamma\to 3$, και $B\to 2$, $\Gamma\to 3$]. Συνολικά έχουμε $\binom{3}{2}\cdot 7+1=22$ νέους συνδυασμούς.

[Δε μετρήσαμε τη θέση 3 για τον τροχό Γ, γιατί έτσι θα μετρούσαμε 3 φορές την αρχική σωστή τοποθέτηση $A\to 1$, $B\to 2$, $\Gamma\to 3$. Απλώς την προσθέσαμε στο τέλος]. Τελικά, απαιτούνται τουλάχιστον $(8^3-22)+1=491$ δοκιμές για να είμαστε σίγουροι ότι το θησαυροφυλάκιο θα ανοίξει.

Γ146. Στον θετικό ημιάξονα Οx παίρνουμε τα σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ και στον Oy τα $B_1, B_2, \ldots B_\mu$. Φέρνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα A_iB_j με $1\le i\le \nu$ και $1\le j\le \mu$. Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής τους που βρίσκονται στην κυρτή γωνία $x\widehat{O}y$.

Μήτσιου Ε.



Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

Σε κάθε σημείο τομής δύο τμημάτων $A_i B_j$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της $x\widehat{O}y$, αντιστοιχεί ακριβώς ένα τετράπλευρο με δύο κορυφές από τις A_i και δύο από τις B_j και αντίστροφα.

Για παράδειγμα στο σημείο M του σχήματος αντιστοιχεί το τετράπλευρο $A_1A_2B_2B_1$. Συμπεραίνουμε ότι: τα σημεία τομής είναι όσα τα τετράπλευρα με δύο κορυφές στον Οx και δύο στον Oy, δηλαδή $\binom{\nu}{2}\binom{\mu}{2}$.

Γ147.

$$f(x)=\int_{1980}^{x}\left[f^{2000}(t)+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right]dt,$$

όπου f συνεχής και $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η πιθανότητα $f(\lambda)\ge 0$ αν λ τυχαίο δίσεκτο έτος του αιώνα μας.

Κατσάς Ν.

Λύση έστειλε ο Κατσάς Ν.

Λύση :

Είναι $f'(x)=f^{2000}(x)+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ακόμη $f(1980)=0$ και

$f(\lambda)\ge 0 \Leftrightarrow f(\lambda)\ge f(1980) \Leftrightarrow \lambda\ge 1980$.

Είναι $\Omega=\{1900, 1904, \ldots, 1996\}$ και $A=\{1980, 1984, \ldots, 1996\}$ οπότε

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

Γ148. Έστω $f(x)=x^3-3\alpha x-4\sqrt{2}$, $x\in\mathbb{R}$, όπου ο αριθμός α καθορίζεται με τυχαία επιλογή από το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο $(-\infty, \sqrt{\alpha}]$.

Θαρραλίδης Α.

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Α.

Λύση :

Είναι $f'(x)=3x^2-3\alpha=3(x^2-\alpha)$ οπότε έχουμε τον εξής πίνακα:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\alpha}$
f'(x)	+	0 −	0
f(x)	↗	↘	

Έτσι η f παρουσιάζει μέγιστο

$$f(-\sqrt{\alpha}) = (-\sqrt{\alpha})^3 - 3\alpha(-\sqrt{\alpha}) - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{\alpha}^3 - 4\sqrt{2} = 2\cdot\left(\sqrt{\alpha}^3 - \sqrt{2}^3\right)$$

Προφανώς, η $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(-\infty, \sqrt{\alpha}\,]$ μόνον όταν

$$f(-\sqrt{\alpha}) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}^3 \geq \sqrt{2}^3 \Leftrightarrow \alpha \geq 2$$

Αν A, λοιπόν, το ενδεχόμενο «η $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(-\infty, \sqrt{\alpha}\,]$» τότε

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{και} \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

Γ149. Έστω $f(x) = x^{\nu}+1$, $x \in \mathbb{R}$ και το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, \varkappa\}$, $\varkappa \in \mathbb{N}^*$. Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό από το Ω και τον τοποθετούμε στη θέση του ν. Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$A: \text{"}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^5-1} = +\infty\text{"}$$

i) Αν $\varkappa=20$ να βρείτε την πιθανότητα P(A).

ii) Αν $P(A) = \frac{2}{5}$ να βρείτε το ϰ.

Θαρραλίδης Λ.

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

i) Είναι $N(\Omega) = \varkappa = 20$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\nu}+1}{x^5-1} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\nu}}{x^5} = +\infty$$

Έτσι, το A πραγματοποιείται όταν $\nu - 5 > 0$ και $\nu - 5$ άρτιος δηλαδή όταν $\nu = 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$. Συμπεραίνουμε ότι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{20} = 35\%$

ii) Είναι $N(\Omega) = \varkappa$ και $A = \{\nu\in\Omega /\ \nu - 5 > 0$ και $\nu - 5$ άρτιος$\}$ δηλ. $A = \{7, 9, 11, \ldots\}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **ϰ άρτιος.** Τότε ο τελευταίος περιττός του συνόλου A είναι ο $\varkappa - 1$ δηλαδή $A = \{7, 9, \ldots, \varkappa - 1\}$. Οι αριθμοί $7, 9, \ldots, \varkappa - 1$ σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 7$, $\alpha_\nu = \varkappa - 1$, $\omega = 2$, άρα $\varkappa - 1 = 7 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow \nu = \frac{\varkappa - 6}{2}$.

  Έτσι $N(A) = \frac{\varkappa - 6}{2}$ και $P(A) = \frac{\frac{\varkappa - 6}{2}}{\varkappa} = \frac{\varkappa - 6}{2\varkappa}$.

  Από $P(A) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\varkappa - 6}{2\varkappa} = \frac{2}{5}$ βρίσκουμε $\boldsymbol{\varkappa = 30}$

- **ϰ περιττός.** Τότε ο τελευταίος περιττός του A είναι ο ϰ, δηλαδή $A = \{7, 9, \ldots, \varkappa\}$.

  Βρίσκουμε $N(A) = \frac{\varkappa - 5}{2}$ και από $\frac{\varkappa - 5}{2\varkappa} = \frac{2}{5}$ τελικά $\boldsymbol{\varkappa = 25}$.

Γ150. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $[f'(x)]^2 < f'(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$, $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$.

α) Να δειχθεί ότι οι αριθμοί f(x) και f′(x) μπορούν να είναι ίσοι με τις πιθανότητες P(A), P(B) των ενδεχομένων A, B ενός πειράματος τύχης.

β) Αν $P(A) = f(x)$, $P(B) = f'(x)$ και $P(A \cap B) = x$ τότε:

$$\frac{x^2}{2} + f(0) \leq f(x) \leq x + e^{-x}\cdot f(0)$$

Ζερβός Κ.

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

α) Είναι $[f'(x)]^2 - f'(x) < 0 \Leftrightarrow \mathbf{0 < f'(x) < 1}$ $\forall x \in [0, 1]$

Έτσι f γν. αύξουσα στο [0, 1] οπότε $0<f(0)<f(x)<f(1)<1$ δηλ. $\mathbf{0<f(x)<1}$ $\forall x\in[0, 1]$. Συμπεραίνουμε ότι: οι αριθμοί f(x), f′(x) μπορούν να είναι ίσοι με τις πιθανότητες ενδεχομένων A, B.

β) Είναι $P(A\cup B)=P(A)+P(B) - P(A\cap B)$ $\Leftrightarrow P(A \cup B) = f(x) + f'(x) - x$

Αλλά $0 \leq P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$
$0 \leq f(x) + f'(x) - x \leq 1 \qquad (1)$

Έστω $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$.

Τότε $g'(x) = f'(x) - x \geq 0$ αφού $A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow x \leq f'(x)$

Έτσι g αύξουσα στο [0, 1] άρα $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow \mathbf{f(x) - \frac{x^2}{2} \geq f(0)} \quad (2)$

Έστω τώρα $h(x) = e^x[f(x) - x]$. Έχουμε $h'(x) = e^x\,[f'(x) + f(x) - x - 1]$ και λόγω της (1): $h'(x) \leq 0$. Έτσι h φθίνουσα στο [0, 1] οπότε $h(x) \leq h(0) \Leftrightarrow e^x\,[f(x) - x] \leq f(0) \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(x) - x \leq e^{-x}\cdot f(0)}$ (3) . Από (2), (3) βρίσκουμε το ζητούμενο.

Γ151. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = 1 + x\cdot e^{-f(x)}$ και $\frac{e^{f(x)}+x+1}{e^x} \leq 1$ $\forall x \neq 0$. Βρείτε την f.

Θαρραλίδης Λ.

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Δίνεται ότι $f'(x) = 1+xe^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)} = x + e^{f(x)} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = x + e^{f(x)}$.

Θέτοντας $g(x) = e^{f(x)}$ είναι λοιπόν

$g'(x)=x + g(x) \Leftrightarrow g'(x)- g(x) = x \Leftrightarrow g'(x)\cdot e^{-x} - g(x)e^{-x} = xe^{-x} \Leftrightarrow (g(x)e^{-x})' = xe^{-x}$ οπότε

$g(x)\, e^{-x} = \int xe^{-x}dx$ δηλαδή

$$g(x)\,e^{-x} = \begin{cases} -xe^{-x} - e^{-x} + c_1, & x < 0 \\ -xe^{-x} - e^{-x} + c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} -x - 1 + c_1e^x, & x < 0 \\ -x - 1 + c_2e^x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = \begin{cases} c_1e^x - x - 1, & x < 0 \\ c_2e^x - x - 1, & x > 0 \end{cases}. \quad \text{Έτσι} \quad \frac{e^{f(x)}+x+1}{e^x} = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Δίνεται ότι $\frac{e^{f(x)}+x+1}{e^x} \le 1$ άρα $c_1 \le 1$, $c_2 \le 1$.

Ακόμη αφού $e^{f(x)} > 0$ θα είναι:

$$c_1e^x - x - 1 > 0 \ \forall x < 0 \ (1), \quad c_2e^x - x - 1 > 0 \ \forall x > 0 \quad (2)$$

- Αν ήταν $c_2 < 1$ τότε $\lim_{x \to 0}(c_2e^x - x - 1) = c_2 - 1 < 0$ και θα υπήρχε περιοχή $(0, \delta)$ τέτοια ώστε $c_2e^x - x - 1 < 0 \ \forall x \in (0, \delta)$, άτοπο λόγω (2). Ώστε $c_2 \ge 1$ και αφού $c_2 \le 1$: $c_2 = 1$.
- Όμοια βρίσκουμε ότι $c_1 = 1$.

Τελικά $e^{f(x)} = e^x - x - 1$, $x \neq 0$ άρα $f(x) = \ln(e^x - x - 1)$, $x \neq 0$

Γ152. **i)** Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και $4\beta - \alpha^2 > 0$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $4\beta e^{2\beta x}(1-\beta x) = \alpha^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{\beta}\right)$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^{\beta x}$ και $g(x) = \alpha\sqrt{x}$ είναι κοινή εφαπτομένη.

Κουρσουμπάς Π.

Λύση έστειλε ο Κουρσουμπάς Π.

Λύση :

i) Έστω $h(x) = 4\beta \cdot e^{2\beta x}(1 - \beta x) - \alpha^2$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{\beta}\right]$ και

$$\left.\begin{aligned} h(0) &= 4\beta - \alpha^2 > 0 \\ h\left(\frac{1}{\beta}\right) &= -\alpha^2 < 0 \end{aligned}\right\}$$

Από Θ. Bolzano η $h(x) = 0$ έχει ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{\beta}\right)$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι: υπάρχουν x_1 και $x_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$\left.\begin{aligned} f'(x_1) &= g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)\cdot x_1 &= g(x_2) - g'(x_2)\cdot x_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \beta \cdot e^{\beta x_1} &= \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2}} \\ e^{\beta x_1} - \beta \cdot e^{\beta x_1}\cdot x_1 &= \alpha\sqrt{x_2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2}}\cdot x_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{2\sqrt{x_2}} &= \beta \cdot e^{\beta x_1} \quad (1) \\ \frac{\alpha\sqrt{x_2}}{2} &= e^{\beta x_1} - \beta \cdot e^{\beta x_1}\cdot x_1 \end{aligned}\right\} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} \frac{\alpha^2}{4} = \beta e^{\beta x_1}\cdot\left(e^{\beta x_1} - \beta e^{\beta x_1}\cdot x_1\right) \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 4\beta e^{2\beta x_1}\cdot(1 - \beta x_1) \quad (2)$$

Από το (i) υπάρχει $x_1 \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$ ώστε να ισχύει η (2). Κατόπιν από (1) προσδιορίζεται και το x_2.

Γ153. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή τρίτη παράγωγο και f'' γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε συνάρτηση

$$g(x) = \int_\alpha^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt, \ x \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετηθεί η g ως προς τα κοίλα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $g(x) = 0$.

Μυταρέλλης Π.

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

α) Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$g(x) = \int_\alpha^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt =$$

$$\left[\frac{(x-t)^2}{2}\cdot f''(t)\right]_\alpha^x + \int_\alpha^x (x-t)f''(t)dt =$$

$$= -\frac{(x-\alpha)^2}{2}\cdot f''(\alpha) + \left[(x-t)\cdot f'(t)\right]_\alpha^x + \int_\alpha^x f'(t)dt = -\frac{(x-\alpha)^2}{2}\cdot f''(\alpha) - (x-\alpha)f'(\alpha) + f(x) - f(\alpha)$$

Έτσι $g'(x) = -(x-\alpha)\cdot f''(\alpha) - f'(\alpha) + f'(x)$, $g''(x) = f''(x) - f''(\alpha)$

Όμως f'' γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα: για $x < \alpha$: $f''(x) < f''(\alpha) \Rightarrow g''(x) < 0$

για $x > \alpha$: $f''(x) > f''(\alpha) \Rightarrow g''(x) > 0$

Η g στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, \alpha]$ και άνω στο $[\alpha, +\infty)$

β) Μία προφανής λύση είναι η $x = \alpha$. Όμως από το (α) έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g''(x)$	−		+
$g'(x)$	↘		↗

Δηλαδή η g' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = \alpha$. Είναι $g'(\alpha) = 0$ οπότε $g'(x) > g'(\alpha) \Leftrightarrow g'(x) > 0 \ \forall x \neq \alpha$, επομένως g γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η ρίζα είναι μοναδική.

Γ154. Έστω η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $K(x, f'(x)\cdot e^x)$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης ισχύει ότι $\int_0^1 f(x)\cdot e^{-x}dx = 2$

α) Να βρεθεί η f.

β) Να βρεθεί το $\int f(x)\,dx + \int e^x f(x)\,dx$.

Ζερβός Κ.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

α) Είναι $f(x) = f'(x)\,e^x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = e^{-x} \Leftrightarrow$

$[\ln f(x)]' = e^{-x}$

οπότε $\ln f(x) = -e^{-x} + c$ και

$f(x) = e^{-e^{-x}+c} = e^{-e^{-x}}\cdot e^c$.

Όμως $\int_0^1 f(x)\,e^{-x}dx = 2 \Leftrightarrow e^c\int_0^1 e^{-e^{-x}}\cdot e^{-x}dx = 2 \Leftrightarrow e^c\int_0^1 \left[e^{-e^{-x}}\right]'dx = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^c\left[e^{-e^{-x}}\right]_0^1 = 2 \text{ απ' όπου βρίσκουμε } e^c = \frac{2}{e^{-1/e} - e^{-1}}.$$

Τελικά $f(x) = \dfrac{2\,e^{-e^{-x}}}{e^{-1/e} - e^{-1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $I = \int [f(x) + e^x f(x)]\,dx = \int [f'(x)\,e^x + e^x f(x)]\,dx = \int (e^x f(x))'\,dx = e^x f(x) + c.$

Γ 155. Βλέπε Γ 159.

Γ156. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $[f(x)]^{1997} + \alpha[f(x)]^3 = -e^{f(x)}$, $\alpha > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c αρνητική σταθερά.

Τσομίδης Α.

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Παραγωγίζοντας τη σχέση: $[f(x)]^{1997} + \alpha[f(x)]^3 + e^{f(x)} = 0$ (1) παίρνουμε:

$$1997\,[f(x)]^{1996} \cdot f'(x) + 3\alpha\,[f(x)]^2 \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$f'(x) \cdot [1997 \cdot f^{1996}(x) + 3\alpha f^2(x) + e^{f(x)}] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ αφού } 1997 \cdot f^{1996}(x) + 3\alpha f^2(x) + e^{f(x)} > 0.$$

Έτσι $f(x) = c$ και (1) $\Leftrightarrow$ $c^{1997} + \alpha c^3 + e^c = 0$ και προφανώς $c < 0$.

Γ157. Να βρεθεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει αρχική F της f με $F(0) = \sqrt{2}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$F(x)(F(x) + 2\,f(x)) = x^2$$

Στεργίου Μ.

Λύση έστειλε ο Στεργίου Μ.

Λύση :

Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$F^2(x) + 2F(x) \cdot F'(x) = x^2 \Leftrightarrow$$
$$F^2(x) + (F^2(x))' = x^2 \Leftrightarrow$$
$$e^x \cdot [F^2(x) + (F^2(x))'] = e^x x^2 \Leftrightarrow$$
$$(e^x \cdot F^2(x))' = x^2 e^x \text{ οπότε}$$

$$e^x \cdot F^2(x) = \int x^2 e^x dx = \ldots = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Έτσι $F^2(x) = x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}$ αι αφού $F(0) = \sqrt{2} \cdots$ $c = 0$.

Τελικά $F^2(x) = x^2 - 2x + 2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ οπότε η F διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$,

δηλαδή $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$ ή $F(x) = -\sqrt{x^2 - 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Όμως $F(0) = \sqrt{2} > 0$ επομένως $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$ και φυσικά

$$f(x) = F'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ158. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με f′ συνεχή. Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\int_\alpha^\beta f(\ln x)dx = -\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} f'(x)e^x dx$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\ln x_o) = -f'(\ln x_o)$.

Τάνης Χ.

Λύση έστειλε ο Τάνης Χ.

Λύση :

Δίνεται ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(\ln x)\,dx = -\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} f'(x)\,e^x dx \quad (1)$$

Θέτοντας $u = \ln x$ είναι $x = e^u$ και $dx = e^u du$, $u_1 = \ln\alpha$, $u_2 = \ln\beta$ οπότε:

$$\int_\alpha^\beta f(\ln x)\,dx = \int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} f(u)\,e^u du = \int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} f(x)\,e^x dx = \int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} f(x)\,(e^x)'\,dx =$$
$$= \left[f(x)\,e^x\right]_{\ln\alpha}^{\ln\beta} - \int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} f'(x)\,e^x\,dx.$$

Έτσι: $\int_\alpha^\beta f(\ln x)\,dx = \left[f(x)\,e^x\right]_{\ln\alpha}^{\ln\beta} - \int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} f'(x)\,e^x\,dx$ και λόγω της (1):

$$\left[f(x)\,e^x\right]_{\ln\alpha}^{\ln\beta} = 0 \Leftrightarrow f(\ln\alpha) \cdot e^{\ln\alpha} = f(\ln\beta) \cdot e^{\ln\beta} \Leftrightarrow \alpha \cdot f(\ln\alpha) = \beta \cdot f(\ln\beta)$$

Θέτοντας $h(x) = x \cdot f(\ln x)$, η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, άρα $h'(x_o) = 0$ για $x_o \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow f(\ln x_o) + f'(\ln x_o) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x_o) = -f'(\ln x_o)$.

Γ159. Να αποδείξετε ότι αν $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ τότε $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Αβραμίδης Κ.

Γ155. Η συνάρτηση φ(x) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$. Ξέρουμε ότι $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$ και $\dfrac{\varphi(x)\,\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^2} \leq 2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2} = 0$.

Αβραμίδης Κ.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

ΛΗΜΜΑ

Αν η συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, +\infty)$, είναι φραγμένη άνω και αύξουσα τότε είναι συγκλίνουσα (έχει όριο) και μάλιστα πεπερασμένο. Το όριο αυτό είναι το κατώτερο άνω φράγμα της f. (Όμοια αν f φθίνουσα και φραγμένη κάτω).

Απόδειξη

Εφόσον η f είναι φραγμένη άνω θα υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $f(x) \leq M$

για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό θα είναι $f(x) > M - \varepsilon$ για κάποια x δηλαδή θα υπάρχει $x_o \in (\alpha, +\infty)$ τέτοιος ώστε $f(x) > f(x_o)$ για κάθε $x > x_o$ (η f είναι γνήσια αύξουσα).

Έχουμε: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει x_o τέτοιο ώστε:

> Αυτός ο αριθμός M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της f στο $(\alpha, +\infty)$ που λέγεται άνω πέρας (supremum) και συμβολίζεται sup f(x).

$M - \varepsilon < f(x) \leq M < M + \varepsilon \quad \forall x > x_o$ άρα $|f(x) - M| < \varepsilon$ επομένως $\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$

Λύση 159:

Εφόσον $f''(x) \geq 0$ στο $[0, +\infty)$ η f' είναι αύξουσα σ' αυτό. Επίσης $f'(x) < 0 \ \forall x \geq 0$.
Εάν $\sup f' = \varkappa < 0$ τότε $f'(x) - \varkappa < 0$ και $f(x) - \varkappa x$ γνήσια φθίνουσα οπότε $\forall x > 0$ είναι $f(x) - \varkappa x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < \varkappa x + f(0)$ και επομένως για $x > -\frac{f(0)}{\varkappa} > 0$ είναι $f(x) < 0$ άτοπο αφού $f(x) > 0 \ \forall x \geq 0$. Άρα $\sup f' = 0$ και από το ΛΗΜΜΑ συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Λύση 155:

Είναι σαν την 159 με $f(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} < 0$.

$$f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} > 0 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{\varphi(x)\,\varphi''(x) - 2[\varphi'(x)]^2}{\varphi^3(x)} \leq 0 \quad \text{και τελικά}$$

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \inf f'(x) = 0$ (infimum).

> **Γ160.** Δίνεται η συνάρτηση
> $f(x) = x\ln(2x-1) - (x+1)\ln x$, με $x > \frac{1}{2}$
> Να δειχθεί ότι
> **α)** $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$
> **β)** $\sqrt[\nu]{\nu} + \frac{1}{\nu} < 2$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
>
> **Μυταρέλλης Π.**

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

α) Έχουμε

$$f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1} - \ln x - \frac{x+1}{x}$$

και

$$f''(x) = \ldots = \frac{x-1}{(2x^2-x)^2}\cdot(4x-1) > 0 \ \forall x > 1$$

οπότε f' γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα $f'(x) > f'(1) = 0 \ \forall x > 1$.
Έτσι f γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ συνεπώς $f(x) > f(1) = 0 \ \forall x > 1$

β) Αφού $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ είναι $\nu > 1$ άρα

$$f(\nu) > 0 \Leftrightarrow \ln(2\nu-1)^\nu - \ln\nu^{(\nu+1)} > 0 \Leftrightarrow (2\nu-1)^\nu > \nu^{(\nu+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)^\nu > \nu \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\nu} > \sqrt[\nu]{\nu} \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\nu} + \frac{1}{\nu} < 2.$$

> **Γ161.** **α)** Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = 2xP'(x)$.
> **β)** Ομοίως αν $2P(x) = xP'(x)$
>
> **Μυταρέλλης Π.**

Λύση έστειλε ο Μυταρέλλης Π.

Λύση :

α) Έστω $P(x) = \alpha_\nu \cdot x^\nu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$, $\alpha_\nu \neq 0$. Τότε $P'(x) = \nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1$ και από τη σχέση

$P(x) = 2x \cdot P'(x) \Leftrightarrow \alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = 2\nu\alpha_\nu x^\nu + \ldots + 2\alpha_1 x$ παίρνουμε κατ' αρχήν $\alpha_\nu = 2\nu\alpha_\nu \Leftrightarrow \nu = \frac{1}{2}$ άτοπο.

Ώστε δεν υπάρχει πολυώνυμο που να ορίζεται ο βαθμός του, που να ικανοποιεί τη δοθείσα σχέση.

Αν $P(x) = c$ τότε $P'(x) = 0$ και $P(x) = 2x \cdot P'(x) \Leftrightarrow c = 0$.

Έτσι το πολυώνυμο $P(x) = 0$ είναι το μόνο που επαληθεύει τη σχέση.

β) Αφού $2P(x) = x \cdot P'(x)$, ανάλογα βρίσκουμε $2\alpha_\nu = \nu \cdot \alpha_\nu \Leftrightarrow \nu = 2$.
Έτσι $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $P'(x) = 2\alpha x + \beta$ και από $2P(x) = x \cdot P'(x)$ βρίσκουμε $\beta = \gamma = 0$. Τελικά $P(x) = \alpha x^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

> **Γ162.** Να βρεθούν στο $(-\infty, 0)$ οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:
> $\left.\begin{array}{l} xf'(x)+2g(x) = 1 \\ xg'(x)+2f(x) = 1 \end{array}\right\}$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$
>
> **Μοσχίδης Ο.**

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

Είναι : $\left.\begin{array}{l} x^2f'(x)+2xg(x) = x \\ x^2g'(x)+2xf(x) = x \end{array}\right\}$

και προσθέτοντας κατά μέλη:

$$x^2(f(x)+g(x))' + (x^2)'(f(x)+g(x)) = (x^2)' \Leftrightarrow [x^2(f(x)+g(x))]' = (x^2)' \Leftrightarrow x^2[f(x)+g(x)] = x^2 + c$$

Έτσι: $f(x) + g(x) = 1 + \frac{c}{x^2}$ (1) $\qquad f'(x) + g'(x) = -\frac{2c}{x^3}$ (2)

Η αρχική σχέση γράφεται:

$$x f'(x) + 2g(x) = 1 \Leftrightarrow x f'(x) + 2\left(1 + \frac{c}{x^2} - f(x)\right) = 1 \Leftrightarrow x f'(x) + 2 + \frac{2c}{x^2} - 2f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$x f'(x) - 2f(x) = -1 - \frac{2c}{x^2} \Leftrightarrow x^2f'(x) - 2xf(x) = -x - \frac{2c}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2c}{x^5} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x^3} - \frac{2c}{x^5} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{2cx^{-4}}{-4} + c_1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \frac{c}{2x^2} + c_1x^2} \quad (3)$$

Ύστερα: $g(x) = 1 + \frac{c}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{c}{2x^2} - c_1x^2 \Leftrightarrow \boxed{g(x) = \frac{1}{2} + \frac{c}{2x^2} - c_1x^2}$ (4)

Από τα προηγούμενα:

$$f'(x) = -\frac{2c}{2}x^{-3} + 2c_1x = \frac{c}{x^3} + 2c_1 x \quad (5)$$

$$g'(x) = \frac{c}{x^3} - 2c_1 x \quad (6)$$

Έτσι: $xf'(x) + 2g(x) = 1 \Leftrightarrow x\frac{c}{x^3} + 2c_1x^2 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2x^2} - c_1x^2\right) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{c}{x^2} + \cancel{2c_1x^2} + \cancel{1} + \frac{c}{x^2} - \cancel{2c_1x^2} = \cancel{1} \Leftrightarrow \frac{2c}{x^2} = 0 \quad \text{άρα} \quad \boxed{c = 0}$$

Τελικά: $f(x) = \frac{1}{2} + c_1x^2$ και $g(x) = \frac{1}{2} - c_1x^2$.

Γ163. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και τέτοια ώστε:

$\ln(\beta x + 1) \le \int_0^x f(t)dt \le e^{\alpha x} - 1,\ \forall x > -\frac{1}{\beta}$,

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός.

α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ και

β) Αν $g(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(\beta x + 1) + e^{\alpha x} - 1\right]$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της, που διέρχεται από το σημείο A(- 1, - 1).

Μήτσιου Ε.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

α) Θέτοντας $g(x) = \ln(\beta x + 1) - \int_0^x f(t)dt$

είναι $g(0) = 0$ και η ανισότητα

$$\ln(\beta x + 1) \le \int_0^x f(t)dt \quad \forall x > -\frac{1}{\beta}$$

γράφεται $g(x) \le g(0)$ επομένως $g'(0) = 0$ από Θ. Fermat [η g παρουσιάζει ακρότατο στο 0].

Όμως $g'(x) = \frac{\beta}{\beta x + 1} - f(x)$ άρα $\beta - f(0) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

Όμοια θέτοντας

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt - \left(e^{\alpha x} - 1\right) \text{ είναι } h(x) \le h(0) \text{ άρα } h'(0) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

β) Είναι $g(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(x+1) + e^x - 1\right]$. Μετά τις πράξεις, βρίσκουμε ότι:

η εφαπτομένη στο $M(x_o, g(x_o))$ διέρχεται από το A(- 1, - 1) μόνον όταν . . .

$$x_o \cdot e^{x_o} - \ln(x_o + 1) = 0 \quad (1)$$

Θέτοντας $t(x) = xe^x - \ln(x + 1)$, $x > -1$, είναι

$t'(x) = (x + 1)e^x - \frac{1}{x + 1}$, $t''(x) = (x + 2)e^x + \frac{1}{(x + 1)^2} > 0$ άρα t′ γν. αύξουσα.

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα:

[εύκολα βρίσκουμε ότι $t(0) = t'(0) = 0$].

Έτσι: η εξίσωση $t(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0, δηλ. (1) $\Leftrightarrow x_o = 0$. Η εφαπτομένη είναι . . . $y = x$.

x	− 1	0	+ ∞
t′(x)	− ↗	0	↗ +
t(x)	↘	0	↗

Γ164. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $K(x_o, f(x_o))$.

Α. α) Δείξτε ότι

$f(x_o - x) + f(x_o + x) = 2f(x_o)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

β) Δείξτε ότι εάν το Κ ταυτίζεται με το Ο (την αρχή των αξόνων) τότε η f είναι περιττή.

Β. α) Εάν η C_f δεν είναι ευθεία δείξτε ότι η C_f δεν διατηρεί σταθερό είδος κυρτότητας.

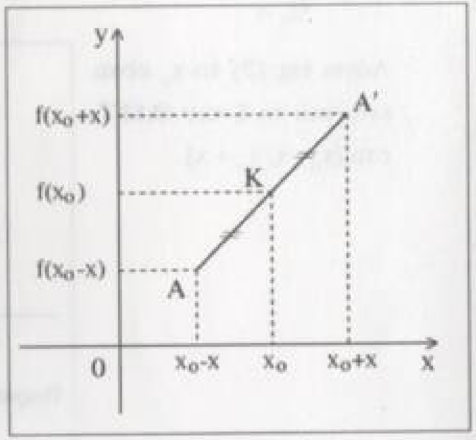
β) Να δείξετε ότι ένα από τα ξ του Θ.Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού σε κάθε διάστημα $[x_o - x, x_o + x]$ είναι το x_o.

Μήτσιου Ε.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

Α. α) Αν $A(x_o - x, f(x_o - x))$ σημείο της C_f τότε το συμμετρικό του $A'(x_1, y_1)$ ως προς Κ θα ανήκει στην C_f.



Είναι $\overrightarrow{KA'} = \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_o = x_o - (x_o - x) \\ y_1 - f(x_o) = f(x_o) - f(x_o - x) \end{cases}$

απ' όπου: $\begin{cases} x_1 = x_o + x \\ y_1 + f(x_o - x) = 2f(x_o) \end{cases}$

Όμως $y_1 = f(x_1) = f(x_o + x)$ άρα $f(x_o + x) + f(x_o - x) = 2f(x_o)$ (1)

β) Είναι $K \equiv O(0, 0)$ άρα $x_o = f(x_o) = 0$. Η (1) γράφεται

$f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), x \in \mathbb{R}$. Έτσι η f είναι περιττή.

B. α) Έστω ότι η f διατηρεί σταθερό είδος κυρτότητας. Τότε η f' είναι γνήσια μονότονη. Ωστόσο, παραγωγίζοντας την (1) παίρνουμε:

$f'(x_o + x) - f'(x_o - x) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o + x) = f'(x_o + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άτοπο, αφού η f' ως γνήσια μονότονη είναι και ένα προς ένα.

β) Έστω $\Phi(x) = \int_{x_o - x}^{x_o + x} f(t)dt$. Είναι $\Phi'(x) = f(x_o + x) - f(x_o - x) = 2f(x_o)$.

Έτσι $\Phi(x) = 2f(x_o) \cdot x + c$. Όμως $\Phi(0) = \int_{x_o}^{x_o} f(t)dt = 0$, άρα $c = 0$.

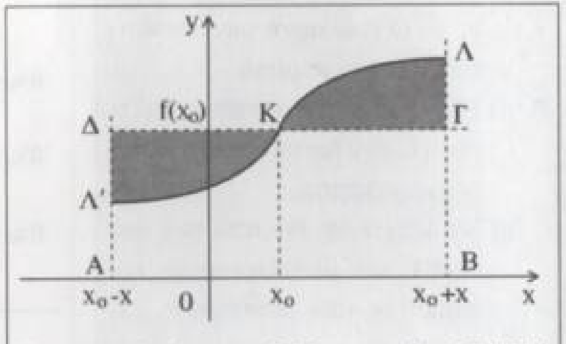
Τελικά $\Phi(x) = 2f(x_o) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. του ολοκληρωτικού λογισμού:

υπάρχει $\xi \in (x_o - x, x_o + x)$:

$$\int_{x_o - x}^{x_o + x} f(t)dt = [(x_o + x) - (x_o - x)] \cdot f(\xi) \Leftrightarrow \Phi(x) = 2f(\xi) \cdot x.$$

Λόγω της (2) το x_o είναι ένα από τα ξ του Θ.Μ.Τ. στο $[x_o - x, x_o + x]$.



Παρατηρούμε ότι: το εμβαδό του χωρίου ΑΒΛΚΛ' $\left(\text{ταυτίζεται με το } \int_{x_o - x}^{x_o + x} f(t)dt\right)$ είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Γ165. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να είναι $f^3(x) + f(x) + x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να δείξετε ότι είναι αυστηρώς φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ θέτουμε $x_\nu = \nu(\nu^2+1) = \nu^3+\nu$. Να δείξετε ότι είναι $f(x_\nu) = -\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε να είναι $f(x) < -M \quad \forall x > x_\nu$. Τι συμπεραίνετε από το τελευταίο συμπέρασμα;

Καζαντζής Θ.

Λύση έστειλε ο Θ.Ν. Καζαντζής.

Λύση :

α) Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + f^2(x)} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ετσι η f είναι αυστηρώς φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έχουμε: $f^3(x_\nu) + f(x_\nu) + x_\nu = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

άρα και $f^3(x_\nu) + f(x_\nu) + \nu^3 + \nu = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow [f(x_\nu)+\nu] \cdot [f^2(x_\nu) - \nu \cdot f(x_\nu) + \nu^2 + 1] = 0$

Η εξίσωση $f^2(x_\nu) - \nu \cdot f(x_\nu) + \nu^2 + 1 = 0$ δεν έχει πραγματική ρίζα, είναι λοιπόν $f(x_\nu) = -\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$. [πράγμα που περιμέναμε αφού η f είναι 1 - 1].

γ) Έστω $M > 0$ τυχαίος και $\nu > M$. Τότε $\forall x > x_\nu$ είναι $f(x) < f(x_\nu) = -\nu < -M$

Τούτο σημαίνει ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Γ166. Έστω ότι είναι $f(x) > 0$ και $f''(x) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Καζαντζής Θ.

Λύση έστειλε ο Θ.Ν. Καζαντζής.

Λύση :

Έστω $x_o \in \mathbb{R}$ και $M(x_o, f(x_o))$ το αντίστοιχο σημείο της C_f. Η εφαπτομένη στο M είναι η (n): $y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$.

Η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f κείται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη. Τούτο σημαίνει ότι: $\forall x_o \in \mathbb{R}$ είναι

$f(x) \le f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o)$ οπότε

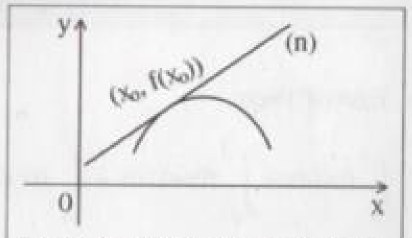
$f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall x_o \in \mathbb{R}$ (1)

Αν είναι $f'(x_o) > 0$ για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)] = -\infty$$

ενώ αν $f'(x_o) < 0$ τότε

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)] = +\infty$$



Για τη σταθερότητα της f, αποδεικνύουμε ότι $f'(x_o) = 0, \forall x_o \in \mathbb{R}$. Προς τούτο, αρκεί να δείξουμε ότι για κανένα $x_o \in \mathbb{R}$, δεν είναι δυνατό να είναι $f'(x_o) > 0$ είτε $f'(x_o) < 0$.

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε άτοπο, λόγω της (1). Έτσι θα είναι $f'(x_o) = 0 \quad \forall x_o \in \mathbb{R}$ και η f είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Γ167. Βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ για τις οποίες έχει λύση η εξίσωση

$$\int_0^x \left(t^2 - 8t + 13\right) dt = x \,\eta\mu \frac{\alpha}{x}$$

Ποια είναι αυτή η λύση;

Κατσιούλης Δ. - Νίκου Θ.

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

Η εξίσωση γράφεται:

$$\left[\frac{t^3}{3} - 4t^2 + 13t\right]_0^x = x \cdot \eta\mu \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 13x = x \cdot \eta\mu \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{3} - 4x + 13 = \eta\mu \frac{\alpha}{x} \quad (1) \quad \text{αφού } x \neq 0.$$

Όμως η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{3} - 4x + 13$ έχει ελάχιστη τιμή 1 για $x = 6$.

$$\text{Έτσι } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu \frac{\alpha}{x} = 1 \\ \text{και} \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\alpha}{6} = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = 12\kappa\pi + 3\pi, \ \kappa \in Z$$

και η λύση $x = 6$

Γ168. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)+f(x+1)+f(x+2)+\ldots+f(x+1996) = 3994x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δειχθεί ότι $\int_0^{1997} f(x)dx = 1997$

Ζανταρίδης Ν.

Λύση έστειλε ο Ζανταρίδης Ν.

Λύση :

$$\text{Είναι } \int_0^1 f(x+\alpha)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)\,dx \quad (1)$$

Πράγματι, αν $u = x+\alpha$ είναι $du = dx$ άρα

$$\int_0^1 f(x+\alpha)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+1} f(u)\,du = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)\,dx.$$

Έχουμε τώρα:

$$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x+1)\,dx + \int_0^1 f(x+2)\,dx + \ldots + \int_0^1 f(x+1996)\,dx = \int_0^1 3994x\,dx$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \ldots + \int_{1996}^{1997} f(x)\,dx = \left[1997x^2\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^{1997} f(x)\,dx = 1997$$

Γ169. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 16, & x < 3 \\ 7 - \sqrt{x^2 - 9}, & x \geq 3 \end{cases}$

Γουτζίδης Π.

Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Λ.

Λύση :

$$\text{Είναι } f'(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 3 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}, & x > 3 \end{cases}$$

και η f δεν είναι συνεχής (ούτε παραγωγίσιμη φυσικά) στο $x_o = 3$.

Έχουμε

x	−∞	-2		3	+∞
f'(x)	−	0	+		−
f(x)	↘		↗		↘

Στο $x_o = -2$ έχουμε τοπικό ελάχιστο $f(-2) = -20$

Στο $x_o = 3$ έχουμε τοπικό μέγιστο αφού $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(x^2 + 4x - 16\right) = 5$, $f(3) = 7$

Γ170. Α. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln|x| = \frac{\alpha}{2x}$.

Β. Εάν η συνάρτηση f με $f(x) = x\ln x^2$ είναι συνεχής στο $x_o=0$ να δείξετε ότι:

α) $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ και

β) το εμβαδόν που σχηματίζεται από τον x'x και την C_f είναι 1.

Μήτσιου Ε.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

$$\textbf{Α. } \ln|x| = \frac{\alpha}{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \dfrac{\alpha}{2x}, & x > 0 \\ \ln(-x) = \dfrac{\alpha}{2x}, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ln x = \alpha, & x > 0 \quad (1) \\ 2x\ln(-x) = \alpha, & x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Έστω $f(x) = 2x\ln x$.

Είναι $f'(x) = 2(\ln x + 1)$ άρα:

x	0	1/e	+∞
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

Ακόμη: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$ άρα $f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[-\frac{2}{e}, 0\right)$, $f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{2}{e}, +\infty\right)$. Έτσι:

- αν $\alpha < -\frac{2}{e}$, η (1) είναι αδύνατη

- αν $\alpha = -\frac{2}{e}$, (1) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$
- αν $-\frac{2}{e} < \alpha < 0$, η (1) έχει δύο ρίζες, μία στο $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ και μία στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
- αν $\alpha \geq 0$, η (1) έχει μία ρίζα, στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Ανάλογα για την (2).

Β. Είναι $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

Έτσι $f(x) = \begin{cases} x\ln x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Είναι $f(-x) = (-x)\ln(-x)^2 = -f(x)$ άρα f περιττή και $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.

[Μπορούμε να γράψουμε και $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$ και να εργαστούμε για το $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ με την αντικατάσταση $x = -u$]

β) Έστω $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f(x)		0	+	0	−	0	

Είναι $E = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

Έχουμε $\int x\ln x^2\,dx = \ldots = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x^2 - x^2\right)$.

Η συνάρτηση $\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x^2 - x^2\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι αρχική της f στο [-1, 1].

Έτσι $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \left[\Phi(x)\right]_0^1 = \Phi(1) - \Phi(0) = -\frac{1}{2}$.

Όμοια $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ άρα $E = 1$.

Γ171. **α)** Έστω $\alpha, \beta > 0$, τέτοια ώστε να είναι $\alpha^x - \beta^x \geq x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι θα είναι $\alpha = \beta e$.
β) Να εξετάσετε αντίστροφα, αν για $\alpha = \beta e$ με $\beta > 0$, θα είναι $\alpha^x - \beta^x \geq x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

Καζαντζής Θ.

Λύση έστειλε ο Θ.Ν. Καζαντζής.

Λύση :

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x - \beta^x - x$. Έχουμε τότε $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ καθώς και $f(0) = 0$. Η f παίρνει, λοιπόν, την ελάχιστη τιμή της για $x = 0$.

Παρατηρούμε ότι και οι υπόλοιπες συνθήκες Fermat ικανοποιούνται [η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του A_f].

Έτσι $f'(0) = 0$. Όμως $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - \beta^x \ln\beta - 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$\alpha^0 \ln\alpha - \beta^0 \ln\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{\alpha}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta e.$$

β) Έστω $\alpha = \beta e$ και $\beta > 0$ (οπότε και $\alpha > 0$). Είναι τότε:

$$f(x) = \alpha^x - \beta^x - x = \beta^x \cdot e^x - \beta^x - x = \beta^x (e^x - 1) - x \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = -1$: $f(-1) = \ldots = \frac{e\beta - e + 1}{e\beta}$ και τελικά $f(-1) = \frac{1}{\beta}\left[\beta - \frac{e-1}{e}\right]$.

Παίρνοντας $\beta \in \left(0, \frac{e-1}{e}\right)$ και $\alpha = \beta e$ βρίσκουμε $f(-1) < 0$.

Το αντίστροφο λοιπόν, δεν ισχύει.

Γ172. Δίνεται η συνάρτηση

$$\Phi(x) = \int_{1+x}^{1+x^2} \frac{dt}{\ln t} \;\; \text{για } x > 0.$$

Να δείξετε ότι $\Phi(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [1, +\infty)$.

Μήτσιου Ε.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

Είναι $x^2 \geq x \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 + x \;\; \forall x \geq 1$.

Ακόμη $\frac{1}{\ln t} > 0 \;\; \forall t > 1$.

Έτσι $\Phi(x) = \int_{1+x}^{1+x^2} \frac{dt}{\ln t} > 0 \;\; \forall x > 1$.

Για $x = 1$: $\Phi(1) = 0$. Τελικά $\Phi(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [1, +\infty)$.

Γ173. Έστω $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, +\infty)$ και με $f''(x) > 0$ για $x > 0$.
Να δείξετε ότι:

α) Αν $\lim_{x \to +\infty} [xf'(x) - f(x)] \leq 0$, τότε η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αυστηρώς φθίνουσα για $x > 0$.

β) Αν $f(0) \leq 0$ τότε η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αυστηρώς αύξουσα για $x > 0$.

γ) Αν $f(0)=0$, τότε $f'(0) < \frac{f(x)}{x}$ $\forall x > 0$.

Καζαντζής Θ.

Λύση έστειλε ο Θ.Ν. Καζαντζής.

Λύση :

α) Θέτουμε $g(x) = x \cdot f'(x) - f(x)$, για κάθε $x \geq 0$. Είναι τότε $g'(x) = x \cdot f''(x) > 0$ άρα η g είναι αυστηρώς αύξουσα.

Αν λοιπόν είναι $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

συμπεραίνουμε ότι

$$g(x) = x \cdot f'(x) - f(x) < 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση θ με $\theta(x) = \frac{f(x)}{x}$, για $x > 0$.

Θα είναι $\theta'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} < 0$ για $x > 0$.

Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$ είναι, λοιπόν, αυστηρώς φθίνουσα για $x > 0$.

β) Είναι $g(0) = -f(0) \geq 0$ οπότε $g(x) > 0$ για $x > 0$, αφού η g είναι αυστηρώς αύξουσα για $x > 0$.

Τότε όμως είναι και $\theta'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$ για $x > 0$.

Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$ είναι αυστηρώς αύξουσα για $x > 0$.

γ) Έστω ότι είναι $f(0) = 0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $\Phi(x) = f(x) - x \cdot f'(0)$.
Τότε $\Phi(0) = f(0) = 0$ και $\Phi'(x) = f'(x) - f'(0) > 0$ για $x > 0$ αφού η συνάρτηση f' είναι αυστηρώς αύξουσα για $x \geq 0$.
Συμπεραίνουμε ότι και η συνάρτηση Φ είναι αυστηρώς αύξουσα για $x \geq 0$ και: $\Phi(x) > \Phi(0)$ για $x > 0$ δηλαδή $f(x) - x \cdot f'(0) > 0$ για $x > 0$ οπότε βρίσκουμε τελικά ότι είναι:

$$\frac{f(x)}{x} > f'(0) \quad \forall x > 0.$$

Γ174. Δίνεται συνάρτηση f με

$$f(x) = \ln\left(\sigma\varphi\frac{x}{2}\right) \quad \text{με } x \in (0, \pi).$$

Α. α) Δείξτε ότι $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$$

β) Να δείξετε ότι: $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} f(x)dx = 0$

Β. α) Να μελετηθεί η f ως προς
i) μονοτονία, ασυμπτώτους και να βρεθεί το σύνολο τιμών της
ii) κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της C_f.

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sigma\upsilon\nu^2 t\, \eta\mu t}$$

Μήτσιου Ε.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

Α. α) Είναι $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

$$= \ln\left(\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \ln\left[\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \ln\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \ln\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \ln\left[\frac{1 + \varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1 - \varepsilon\varphi\frac{x}{2}} \cdot \frac{1 - \varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1 + \varepsilon\varphi\frac{x}{2}}\right] = \ln 1 = 0$$

Εάν $f(x_o - x) + f(x_o + x) = 2f(x_o)$ $\forall x$ τότε το σημείο $K(x_o, f(x_o))$ είναι κέντρο συμμετρίας της C_f.

β) Είναι:

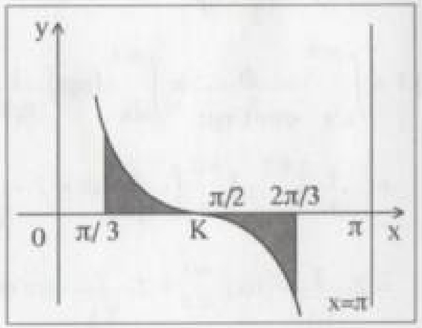
$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} f(x)\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} f(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} f(x)\,dx =$$

Στο 1° ολοκλήρωμα θέτουμε όπου $x = \frac{\pi}{2} - t$ και στο 2° $x = \frac{\pi}{2} + t$

$$= \int_{\pi/6}^{0} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) + \int_{0}^{\pi/6} f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi/6} f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt + \int_{0}^{\pi/6} f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi/6} \left[f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right] dt = \int_{0}^{\pi/6} 0dt = 0$$



Β. α) ● Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\varphi\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\eta\mu^2\frac{x}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}} = -\frac{1}{\eta\mu x} < 0, \quad \forall x \in (0, \pi)$$

Συνεπώς η f είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0, \pi)$.

- Είναι $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ αφού $\lim_{x \to 0^+} \sigma\varphi \frac{x}{2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}}{\eta\mu \frac{x}{2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

 και $\lim_{x \to \pi} f(x) = -\infty$ αφού $\lim_{x \to \pi^-} \sigma\varphi \frac{x}{2} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}}{\eta\mu \frac{x}{2}} = \frac{0^+}{1} = 0^+$

 Από τα όρια αυτά συμπεραίνουμε ότι i) οι ευθείες $x = 0$ (y'y), $x = \pi$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες και δεν υπάρχουν άλλες, αφού $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\forall x_0 \in (0, \pi)$ (λόγω συνέχειας της f στο $(0, \pi)$) και ii) το σύνολο τιμών της f είναι το IR, αφού f συνεχής στο $(0, \pi)$.

 Επίσης η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f''(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$ και είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu x < 0$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, και $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$.

 Έτσι $f''(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα η C_f κυρτή στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) < 0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, άρα η C_f κοίλη στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής το $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

x	0		π/2		π
f''(x)		+	0	−	
f(x)		⌣	σ.κ	⌢	

β) $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sigma\upsilon\nu^2 t\, \eta\mu t} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\varepsilon\varphi t)' \frac{1}{\eta\mu t} dt = \left[\varepsilon\varphi t \cdot \frac{1}{\eta\mu t}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \varepsilon\varphi t \left(-\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu^2 t}\right) dt$

$= \left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu t}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(-\frac{1}{\eta\mu t}\right) dt = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - \int_{\pi/6}^{\pi/3} f'(x)dx =$

$= 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - [f(x)]_{\pi/6}^{\pi/3} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - \text{lm}\ \sigma\varphi \frac{\pi}{6} + \ln \sigma\varphi \frac{\pi}{12} =$

$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \ln\sqrt{3} - \ln \varepsilon\varphi \frac{\pi}{12} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \ln\sqrt{3} - \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) =$

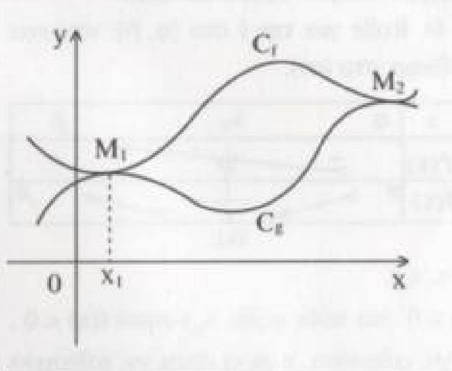
$= 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \ln\left(2\sqrt{3} - 3\right)$

$\varepsilon\varphi^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}$

$\varepsilon\varphi^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$

Γ175. Έστω οι παραγωγίσιμες στο IR συναρτήσεις f, g. Αν οι C_f, C_g έχουν κοινά τα σημεία $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ και κατά τα λοιπά η C_f είναι πάνω από την C_g δείξτε ότι: Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε καθένα από τα $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$.

Θαρραλίδης Α.



Λύση έστειλε ο Θαρραλίδης Α.

Λύση :

Θα δείξουμε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο M_1 [όμοια για τα υπόλοιπα σημεία]. Είναι $f(x_1) = g(x_1)$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x_1) = g'(x_1)$.

Είναι $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in U(x_1, \delta)$ (1)

Θέτοντας $h(x) = f(x) - g(x)$ έχουμε $h(x_1) = 0$ και

(1) $\Leftrightarrow h(x) \geq h(x_1)$ $\forall x \in U(x_1, \delta)$ (2)

Όμως η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ και λόγω της (2) παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1. Από Θ. Fermat, θα είναι

$h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) = g'(x_1)$.

Έτσι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο M_1.

Γ176. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to$ IR παραγωγίσιμη και κυρτή. Εάν υπάρχουν x_1, x_2 θετικοί τέτοιοι ώστε $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ τότε:

α) Η f(x) έχει δύο ρίζες άνισες στο $(0, +\infty)$.

β) Μεταξύ των ριζών της f(x) υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$f'(x) = 3x^2 f(x)$

Μήτσιου Ε.

Λύση έστειλε η Μήτσιου Ε.

Λύση :

α) Η f' δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Αν π.χ. $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ τότε f γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άτοπο αφού

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Όμοια αν $f'(x) < 0$. Υπάρχει λοιπόν $x_o \in (0, +\infty)$ με $f'(x_o) = 0$. Αφού f κυρτή η f' γν. αύξουσα οπότε το x_o είναι μοναδικό και $f'(x) < 0$ για $x < x_o$ ενώ $f'(x) > 0$ για $x > x_o$.

Έχουμε τον διπλανό πίνακα, όπου θέσαμε:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

x	0		x_o		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)	L	↘	Ο.Ε.	↗	L

Αν ήταν $L \le 0$ τότε $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άτοπο αφού $f(x_1)\, f(x_2) < 0$.

Έτσι $L > 0$.

Υποθέτοντας ότι $f(x_o) \ge 0$ θα ήταν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άτοπο.

Τελικά $f(x_o) < 0$, και η f έχει δύο ρίζες: μία στο $(0, x_o)$ και μία στο $(x_o, +\infty)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) \cdot e^{-x^3}$, $x > 0$ και έστω α, β ($\alpha < \beta$) οι ρίζες της f.

Θα είναι $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta) = 0$ και η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $\Phi'(x) = f'(x)e^{-x^3} - 3x^2 \cdot f(x)e^{-x^3}$. Από το Θ. Rolle συμπεραίνουμε ότι έχει ρίζα στο (α, β) η εξίσωση $\Phi'(x) = 0 \Leftrightarrow [f'(x) - 3x^2 f(x)] \cdot e^{-x^3} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 f(x)$.

Έστω τώρα $A(x) = f'(x) - 3x^2 f(x)$. Από Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$: υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_o) = 0$ (μοναδικό όπως δείξαμε στο (α)).

Σχηματίζουμε τον πίνακα:

x	α		x_o		β
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	Ο.Ε.	↗	0

Προφανώς $A(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_o, \beta]$ αφού $f'(x) > 0$ και $3x^2 f(x) < 0$.

Έτσι η ρίζα της $A(x) = 0$ βρίσκεται στο (α, x_o).

Ακόμη : $[-3x^2 f(x)]' = -6x\, f(x) - 3x^2 f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_o)$ αφού $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_o). Έτσι, αφού και f' γν. αύξουσα, η A(x) είναι γν. αύξουσα στο (α, x_o) και η ρίζα είναι μοναδική.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ



Το πρόβλημα του τεύχους

Τ$_4$ Δίνεται η εξής εντολή: Από κάθε αεροδρόμιο να απογειωθεί ένα αεροπλάνο και να προσγειωθεί στο πιο κοντινό αεροδρόμιο.

Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός αεροπλάνων που θα μπορούσαν να προσγειωθούν σε οποιοδήποτε αεροδρόμιο.

Αν το παραπάνω πρόβλημα το μεταφέρουμε στα αστέρια, ποιός είναι ο μεγαλύτερος αριθμός αεροπλάνων που μπορεί να προσγειωθεί σε ένα αστέρι;

Κοντογιάννης Θωμάς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ Λυκείου

Γ177. Δίνονται οι ν×ν πίνακες Α, Β, Γ για τους οποίους ισχύει ότι:

$$I + ΑΒΓ = ΑΒ$$

i) Αποδείξτε ότι οι πίνακες Α, Β, Ι - Γ είναι αντιστρέψιμοι.

ii) Αποδείξτε ότι ΑΒΓ = ΓΑΒ.

iii) Αν Γ = 2ΑΒ - Ι δείξτε ότι

α) $Γ^2 = -I$

β) Ο ν είναι άρτιος και $|Γ| = 1$.

Παπακώστας Κ.

Γ178. Έστω $A \in Π_ν$ με $A = A^{-1}$, και $A \neq \pm I$. Επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς α, β από το σύνολο Ω={1,2,..., 2k}, $k \in N^*$. Να βρεθεί η πιθανότητα ο $A^{α+β} = I$.

Κατσάς Ν.

Γ179. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} α & β \\ γ & δ \end{bmatrix}$ και Ι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας (α, β, γ, δ ∈ IR) με $|A + 3I| = |A + I|$.

α) Να δείξετε ότι $|A - 2I| - |A| = 12$.

β) Εάν $α^2 + 4α \neq 12 - βγ$, να δείξετε ότι το σύστημα:

$$\begin{cases} (α - 2)x + βy = 0 \\ γx + (δ - 2)y = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση ως προς τα x, y και να βρεθεί.

Γεωργακίλας Δ.

Γ180. **Α.** Δίνεται το σύνολο

$A = \{α_1, α_2, \dots, α_ν\}$ $(ν \in N^*)$

i) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Α με κ στοιχεία; (κ ≥ 1)

ii) Πόσα από τα παραπάνω υποσύνολα περιέχουν το $α_1$ και πόσα δεν το περιέχουν;

iii) Να δείξετε ότι $\binom{ν}{κ} = \binom{ν-1}{κ-1} + \binom{ν-1}{κ}$.

Β. Από ν μαθητές (ν ≥ 3) επιλέγουμε τυχαία 3 μαθητές. Αν η πιθανότητα, ένας συγκεκριμένος μαθητής να επιλεγεί, είναι ίση με την πιθανότητα να μην επιλεγεί, τότε να βρείτε το πλήθος των μαθητών.

Γεωργακίλας Δ.

Γ181. Έστω f: IR → IR με $f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε x ∈ IR.

Αν $\int_0^1 x e^{f(x)} dx = 4$ να βρεθεί ο τύπος

Κατσιούλης Δ. - Νίκου Θ.

Γ182. **i)** Δίνεται ο z ∈ C με

$|z| = \sqrt{λ}\,|z - 1|$ με λ > 1.

Να δειχθεί ότι η εικόνα του z κινείται σε κύκλο ο οποίος και να βρεθεί.

ii) Να δειχθεί ότι όλοι οι παρακάτω κύκλοι ∀ λ > 1 βρίσκονται ο ένας στο εσωτερικό του άλλου.

Κουρσουμπάς Π.

Γ183. Δίνεται η εξίσωση

$z^3 + αz^2 + βz - 10 = 0$ με α, β ∈ IR,

δύο ρίζες της οποίας είναι οι $x_o \in$ IR και $z_o \in$ C με $|z_o| = \sqrt{5}$.

α) Να υπολογιστεί ο x_o.

β) Να δειχθεί ότι $|z_o + α| = \left|2 + \frac{2α - 1}{5} z_o\right|$

Πατήλας Χ.

Γ184. Να βρεθεί η συνάρτηση f με τις ιδιότητες:

$(1 + |f(x)|)\, f'(x) = 1 + |x|$, για κάθε x ∈ IR και $f'(0) = 1$.

Μοσχίδης Ο.

Γ185. Αν για τη συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο IR ισχύει:

$$\int_α^{συνα} f(t)dt = 0,$$

αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (-α, α)$, τέτοιο ώστε $f(συνx_o) = 1$ ή $x_o = κπ$, κ∈Z όπου α∈IR*

Παπακώστας Κ.

Γ186. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR → IR για την οποία ισχύει:

$f(x) + f(x - 998) = 0$, για κάθε x ∈ IR.

Να δείξετε ότι:

$$\int_1^{1997} f(x + 1997)\, dx = \int_2^{1998} f(x)\, dx$$

Τσομίδης Α.

Γ187. Έστω ο μιγαδικός z με $Re(z^2) \neq 0$ και η συνάρτηση

$f: C - \{z \in C / Re(z^2) = 0\} \to C$ με

$$f(z) = \frac{z + \bar{z}}{z^2 + \bar{z}^2}.$$

α) Να δειχθεί ότι $z \cdot f(z) = 1$ αν και μόνο αν z ∈ IR.

β) Να βρεθεί η γραμμή στην οποία ανήκει η εικόνα του z αν $|f(z)| = α$, $α \in [0, +\infty)$.

Ζερβός Κ.

Γ188. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{A}{α} = \frac{B}{β} = \frac{Γ}{γ}$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(Ο λόγος $\frac{A}{α}$ ορίζεται σαν $\frac{(A)}{(α)}$)

Ιωσηφίδης Ν.

Γ189. Αν η εξίσωση

$z^6 - z^5 + z^5 (β^2 - 4)i = 32\,[(β^2 - 4)\,i + z - 1]$

έχει 2 πραγματικές ρίζες, να βρεθούν οι υπόλοιπες ρίζες.

Τσομίδης Α.

Γ190. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{ημx + x - 1}{e^x + ημx + συνx + 2x}\, dx,\ x \in \left[0, \frac{π}{2}\right].$$

Στεργίου Μ.

Γ191. Δίνεται η υπερβολή

$$C: \frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$$

και σημείο της $A(x_o, y_o)$. Να δειχθεί ότι για κάθε σημείο (x, y) της υπερβολής ισχύει

$$\left|\,\left|\frac{xx_o}{α^2} - \frac{yy_o}{β^2} - 1\right| - \left|\frac{xx_o}{α^2} - \frac{yy_o}{β^2} + 1\right|\,\right| = 2$$

Μυταρέλλης Π.

Γ192. Έστω ν×ν πίνακας Α μη μηδενικός με $A^2 = 4A$.

α) Να δειχθεί ότι ο πίνακας A - 4I δεν είναι αντιστρέψιμος.

β) Να λυθεί η εξίσωση $A^4 \cdot X = 4^4 \cdot X + I$

Μυταρέλλης Π.

Γ193. Έστω ότι είναι $f'(x)>$συνx για $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

Να δείξετε ότι αν είναι και $f(0)=0$, τότε για κάθε x με $0<x<\frac{\pi}{2}$ θα έχουμε

$$f(x)-f(-x)>2ημx.$$

Καζαντζής Θ.

Γ194. Δίνεται η συνάρτηση

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

α) Δείξτε ότι $f(-x)+f(x)+\ln(1+x^2)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

Γεωργακίλας Δ.

Γ195. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f και παραγωγίσιμη g στο $(-\pi,\pi)$ με $g(1)=0$ και $\forall x\in(-\pi,\pi)$ ισχύει

$$\int_1^x [f(t)+g(x)]\,dt \geq x^2-1 \quad (1)$$

Να δείξετε ότι $f(1)=2$.

Μήτσιου Ε.

Γ196. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$f'(x)>0$ και $g'(x)=x\int_1^x f'(xt)\,dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$

α) Μελετήστε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi^2)=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$.

Θαρραλίδης Λ.

Γ197. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\alpha+1]$ με $f(\alpha)=\alpha+1$ και $f(\alpha+1)=\alpha-2$. Να δείξετε ότι

α) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\alpha+1)$: $f(x_0)=3x_0-2(\alpha+1)$.

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\alpha+1)$ διαφορετικά μεταξύ τους και τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=9$

Μήτσιου Ε.

Γ198. Έστω $f, g: [0,1]\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[0,1]$, από τις οποίες η f κυρτή και η g κοίλη στο $[0,1]$ και τέτοιες ώστε να είναι $f(0)=0$, $g(0)=1$, $f(1)=g(1)=0$.

α) Να δείξετε ότι θα είναι $g(x)-f(x)\geq 1-x$ $\forall x\in[0,1]$. β) Να δείξετε ότι θα είναι $g'(0)>f'(0)-1$ και $g'(1)\leq f'(1)-1$

Καζαντζής Θ.

Γ199. Για τα μοναδιαία συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}$ ισχύουν:

$\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\beta}\vec{\delta}+2=0$, $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\gamma}\vec{\delta}=0$. Αν Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου και θέσουμε

$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}=\vec{\delta}$, δείξτε ότι: το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Θαρραλίδης Λ.

Γ200. Δίνονται οι μιγαδικοί w, z με $|z|=1$ και $\mathrm{Im}(z)\neq 0$.

α) Να δειχθεί ότι $z-\frac{1}{z}\in I$

β) Αν οι παραπάνω μιγαδικοί ικανοποιούν την εξίσωση

$$z(z+|w|)+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-|w|\right)=1,$$

να βρεθεί ο γ.τ. της εικόνας του w.

Πατήλας Χ.